



**MNI-Fonds für Unterrichts- und Schulentwicklung  
S 2 „Grundbildung und Standards“**

---

# **MPH5**

**MATHEMATIK-PHYSIK IN DER 5. KLASSE  
REALGYMNASIUM KOORDINIERT UNTERRICHTEN**

*Gerhard Rath (Projektkoordination)*

*Waltraud Knechtl*

**BRG Keplerstraße 1, 8020 Graz  
Institut für Physik der Universität Graz**

Graz, 2005

# INHALTSVERZEICHNIS

<b>ABSTRACT</b> .....	<b>3</b>
<b>1 EINLEITUNG</b> .....	<b>4</b>
1.1 Ausgangssituation .....	4
1.2 Ziele .....	4
1.3 Bezüge zum Grundbildungskonzept .....	4
1.4 Inhaltliche Bereiche .....	5
1.5 Zum Ablauf des Projekts.....	6
1.6 Mathematik im Physikunterricht – Physik im Mathematikunterricht .....	6
<b>2 MATHEMATIK UND PHYSIK – IN DER 5. KLASSE KOORDINIERT UNTERRICHTEN</b> .....	<b>11</b>
2.1 Größenordnungen - Zehnerpotenzen .....	11
2.2 Funktionen - Kinematik .....	12
2.3 Trigonometrie - Entfernungsmessung, Kräftezerlegung .....	13
2.4 Vektoren - Impuls.....	14
<b>3 AUFGABEN - UNTERSUCHUNGEN</b> .....	<b>16</b>
3.1 Untersuchung der Lehrbücher .....	16
3.2 Evaluation einer Lernzielkontrolle Physik .....	18
3.3 Wie interessant sind Bewegungsaufgaben? .....	19
<b>4 RESÜMEE UND AUSBLICK</b> .....	<b>21</b>
<b>5 LITERATUR</b> .....	<b>22</b>
<b>6 ANHANG</b> .....	<b>23</b>
6.1 Lehrplanvergleich .....	23
6.2 Größenordnungen – Zehnerpotenzen .....	25
6.3 Funktionen - Bewegungsdiagramme .....	27
6.4 Trigonometrie - Kräftezerlegung .....	30
6.5 Vektoren und Impuls .....	33
6.6 Lernzielkontrollen aus Physik .....	36
6.7 Schularbeitenbeispiele aus Mathematik mit physikalischem Bezug ..	38
6.8 Mathematische und physikalische Aufgaben – „gute“ und „schlechte“	39
6.9 Gut bewertete Aufgaben der Lehrbücher .....	41
6.10 Wie interessant sind Bewegungsaufgaben? .....	42

## ABSTRACT

*Die Qualität des Unterrichts in Mathematik und Physik soll durch eine Koordination der Inhalte und Aufgaben an geeigneten Themen verbessert werden. Wir versuchten dies in vier Themenbereichen für die 5. Klasse Realgymnasium: Zehnerpotenzen - Größenordnungen, Funktionen – Bewegungen, Trigonometrie – Kräfte und Vektoren – Impuls. Insbesondere wurde nach „guten“ fächerübergreifenden Aufgabenstellungen (bzw. nach Kriterien für solche) gesucht.*

**Schulstufe:** 9  
**Fächer:** Mathematik, Physik  
**Kontaktperson:** Dr. Gerhard Rath (gerhard.rath@brgkepler.at)  
**Kontaktadresse:** BRG Keplerstraße 1, 8020 Graz  
**Webseiten** <http://rath.brgkepler.at/imst/mph5>

# 1 EINLEITUNG

## 1.1 Ausgangssituation

Nach unserer Erfahrung herrscht in den höheren Schulen ein eher unkoordiniertes Nebeneinander von Mathematik und Physik bei teilweise ähnlichen bzw. entsprechenden Inhalten. Die neuen Lehrpläne geben die Chance, die Vorgangsweise in beiden Fächern besser aufeinander abzustimmen. Wir möchten die Unterschiede und Gemeinsamkeiten verstehen und sie auch den Schüler/innen bewusst machen. Insbesondere konzentrieren wir uns auf Aufgabenstellungen und versuchen diese vor dem Hintergrund des Grundbildungskonzepts zu bewerten und zu verbessern.

## 1.2 Ziele

- Entwickeln, Durchführen und Evaluieren von fächerkoordinierenden Sequenzen
- Untersuchen von Problemen der wechselseitigen Anwendung von Methoden und Aufgaben
- Finden und Testen von (für beide Fächer) "guten" (grundbildungsrelevanten) Aufgaben
- Einbindung von Student/-innen des "Schulpraktischen Seminar 2" (Fachdidaktik Physik – Uni Graz)

## 1.3 Bezüge zum Grundbildungskonzept

### 1.3.1 Grundlegende Konzepte und Kompetenzen

Im Grundbildungskonzept vom IMST<sup>2</sup>-S1 heißt es:

*„Mathematisch-Naturwissenschaftliche Grundbildung bedeutet, dass Menschen mit den grundlegenden Konzepten der Naturwissenschaften und der Mathematik vertraut sind.“ (5)*

Die folgenden Konzepte bzw. Kompetenzen spielen sowohl in der Physik als auch in der Mathematik eine fundamentale Rolle, daher gehören sie nach unserer Ansicht zu grundbildungsrelevanten Inhalten des Unterrichts in diesen Fächern.

- Umgang mit Zehnerpotenzen und Größenordnungen
- Umformen und Interpretieren von Formeln
- Interpretieren von Diagrammen
- Räumliche Vorstellung – Orientierung, Gerichtetheit

Um eine dauerhafte Integration in die Denkstrukturen der Schüler/innen zu erreichen, müssen diese Aspekte geübt und immer wieder in verschiedenen Kontexten angewendet werden. Daher sollen diese Kompetenzen bzw. Inhalte auch in den folgenden Jahren fächerkoordiniert wiederholt und vertieft werden.

### 1.3.2 Leitlinien

Inhaltlich lässt sich der stärkste Bezug zur Leitlinie „**Wissenschaftsverständnis**“ festmachen.

*„Einsicht in naturwissenschaftliches Denken und Arbeiten ist zu vermitteln. Weiters können die Fähigkeiten zur Abstraktion und Modellbildung geschult, fachsprachliche Kompetenzen erworben sowie fachspezifische Strukturen und Ordnungsprinzipien erkannt werden.“ (5)*

Durch den deutlichen Wunsch der Schüler/innen nach realitätsnahen, anwendbaren Aufgaben kam im Verlauf des Projekts auch der Aspekt der **Alltagsbewältigung** stärker ins Spiel.

Methodisch zielt die fächerkoordinierte Vorgangsweise natürlich stark auf die Leitlinie „Wissen in verschiedenen Kontexten anwenden lernen“. Das ganze Projekt kann als eine Antwort auf folgende Frage des Grundbildungskonzepts gesehen werden:

*„Wie gelingt die Nutzung fachübergreifender Kooperationen, um Inhalte gezielt unter verschiedenen Perspektiven zu bearbeiten und in ihrer möglichen Vielfalt zu akzeptieren?“ (5)*

## 1.4 Inhaltliche Bereiche

Ein Vergleich der neuen Lehrpläne für Mathematik und Physik zeigt, dass sich bereits in den allgemeinen Teilen einige Parallelitäten finden.

So heißt es z.B. im Lehrplan für Mathematik:

*Mathematik ist eine spezielle Form der Erfassung unserer Erfahrungswelt; sie ist eine spezifische Art, die Erscheinungen der Welt wahrzunehmen und durch Abstraktion zu verstehen; Mathematisierung eines realen Phänomens kann die Alltagserfahrung wesentlich vertiefen.*

Ganz ähnlich klingt ein Satz aus dem Lehrplan für Physik:

*Mathematisierung als spezifische physikalische Arbeitsweise bedeutet das Durchlaufen verschiedener Stufen zunehmender Abstraktion von der Gegenstandsebene über bildliche, sprachliche und symbolische Ebenen zur formal-mathematischen Ebene.*

Die vollständige Gegenüberstellung findet sich im Anhang (-> Seite 23). Inhaltlich lassen sich für die 5. Klasse vier Bereiche festmachen (wobei der Lehrplan Physik mehr Freiheit gibt, da er für die 5. und 6. Klasse Inhalte auflistet).

#### **Mathematik**

Zehnerpotenzen, Exponentialschreibweise

Funktionen

Winkelfunktionen, Trigonometrie

Vektoren

#### **Physik**

Größenordnungen: Raum und Zeit, Fermi-Probleme

Bewegungsaufgaben, Diagramme

Entfernungsmessung, Positionsbestimmung, Kraftkomponenten

Kraft, Impuls, Arbeit

## 1.5 Zum Ablauf des Projekts

Nach vorbereitenden Literaturstudien (-> 1.6) begannen wir mit dem Vergleich der Lehrpläne für die beiden Fächer. Die darin sichtbaren Berührungspunkte führten zu einer groben Jahresplanung mit Festlegung von parallelen Sequenzen.

Durchgeführt wurde die Arbeit insbesondere in der 5.a-Klasse (20 Schüler und 8 Schülerinnen). *Waltraud Knechtl* hat diese Klasse in Mathematik, Geografie und Informatik und ist auch der Klassenvorstand, *Gerhard Rath* unterrichtet Physik. Einige Teile der Arbeit wurden parallel in der 5.c-Klasse (22 Schüler, 4 Schülerinnen) versucht (*Christa Preis – M, Gerhard Rath – Ph*).

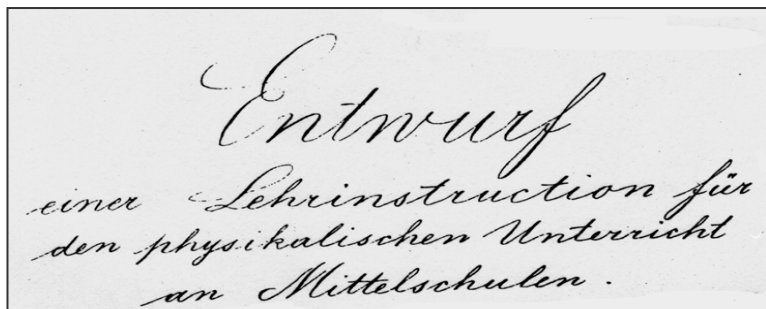
Der erste Schwerpunkt des Projekts war also das **fächerkoordinierende Unterrichten** mit dem angestrebten Produkt: fächerübergreifende Sequenzen zu erproben und zu dokumentieren.

Der zweite Schwerpunkt, die **Untersuchung und Verbesserung der Aufgabenqualität**, lief parallel dazu. Angestrebtes Produkt: Evaluationen und Beispiele für „gute“ (fächerübergreifende) Aufgaben.

Hier begannen wir mit einfachen Auswertungen in schriftlichen Arbeiten zur Leistungsfeststellung. Im Jänner 2005 führten Student/-innen des Lehramts Physik im Schulpraktischen Seminar 2 als Semesterprojekt mit den Schüler/-innen der 5.a-Klasse eine umfangreiche Evaluation verschiedener Bewegungsaufgaben durch. Danach interessierten uns noch die „Standardaufgaben“ der beiden verwendeten Lehrbücher, anhand derer die Schüler/-innen beider Klassen sich mit Kriterien für „gute“ Aufgabenstellungen auseinandersetzten.

Die meisten Aktivitäten verliefen zufriedenstellend und nach Plan, was jedoch auch unserer großen Erfahrung zuzuschreiben ist. Denn das vorhandene Zeitbudget war knapp, liefen doch in diesem Schuljahr die Vorbereitungen für eine Oberstufenreform im BRG Kepler, in die wir stark involviert waren.

## 1.6 Mathematik im Physikunterricht – Physik im Mathematikunterricht



„Der Zweck des physikalischen Studiums ist die Erkenntnis des **Zusammenhanges der Erscheinungen**. Der Schüler soll also angeleitet werden zur Beobachtung und zur Ableitung von Regeln aus den Beobachtungen. Dazu ist die **Mathematik nur ein Mittel**.

*Es bleibt in der Physik noch sehr viel zu verstehen übrig, auch wenn man alle Mathematik bei Seite lässt.*

*Wo aber Mathematik angewandt wird, muss man sich die Bedeutung dieser Anwendung gegenwärtig halten und gelegentlich auch dem Schüler klar machen. Jede Formel die ein Naturgesetz ausdrückt, ist bloß ein zusammenfassender Ausdruck einer Reihe von Thatsachen. Die Formel ist die kürzeste, einfachste, zusammenfassendste Beschreibung der Erscheinungen.“ (14)*

Physik kann man ohne Mathematik betreiben, zumindest in der Schule. Wenn man aber Mathematik einsetzt, soll man dies bewusst und durchdacht machen. Zum Verständnis physikalischer Vorgänge kann verfrühte Mathematisierung auch hinderlich sein.

Das vorangestellte Zitat stammt von niemand Geringerem als Ernst Mach – ähnliche Meinungen hörte man aber auch von A. Einstein oder M. Planck (z.B: (9, S. 413)). Der Teilchenphysiker Hans Graßmann schreibt:

*„Viele Leute fürchten, die Physik sei eine ungeheuerliche Ansammlung von Formeln. Sie zu verstehen würde voraussetzen, all diese Mathematik zu beherrschen. Das ist aber falsch. Die Mathematik dient dem Physiker als Werkzeug, sie ist für ihn, was der Kran für den Arbeiter am Bau ist. Um einen Bau zu errichten, ist ein Kran notwendig, wenn man nachher das Bauwerk besehen oder gar bewohnen möchte, da stünde der Kran nur im Weg rum, und so schafft man ihn besser weg. (15, S. 14)*

Die Physik braucht also die Mathematik nicht – braucht die Mathematik Physik?

Was Mathematik als Wissenschaft betrifft, formuliert sich diese unabhängig von der Natur. Das Schulfach Mathematik greift auf physikalische Fragen weitgehend nur in Form von Anwendungsbeispielen für mathematische Formalismen zurück. Sie könnten wohl ohne größere Probleme weggelassen werden, wofür sogar spricht, dass Textbeispiele generell zu den unbeliebteren gehören und das Fach Physik meist bei den Schüler/innen unbeliebter als Mathematik ist (10).

Es stellt sich also die Frage: Was kann es für die Schüler/innen bringen, die beiden Fächer stärker zu koordinieren? Was kann die Mathematik in der (Schul-)Physik leisten, was ist der Sinn von Formeln, Rechnungen und Ableitungen? Was bringt umgekehrt die Physik für die (Schul-)Mathematik?

### 1.6.1 Eine historische Trennung

Die Physik ist als Schulfach im 18. Jahrhundert aus der Mathematik entstanden und wurde vorerst auch nach mathematischen Methoden unterrichtet. In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts wurde die Kritik an dieser Zielrichtung immer stärker (wie auch das obige Zitat von E. Mach zeigt). Die Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte formulierte 1905 in den berühmten Meraner Reformvorschlägen:

*„Die Physik ist im Unterricht nicht als mathematische Wissenschaft, sondern als Naturwissenschaft zu behandeln.“ (9, S. 414)*

Damit richtete sich das Augenmerk der Didaktik stärker auf Methodiken wie **Beobachten** oder **Experimentieren**, was jedoch zur Folge hatte, dass Ziele und Umsetzung des Einsatzes von Mathematik im Physikunterricht weniger beachtet wurden. Verstärkt wurde die Trennung im vorigen Jahrhundert durch die Orientierung des Mathematikunterrichts an Prinzipien der **Mengenlehre**, wodurch sich das Schulfach stärker an seiner Wissenschaft ausrichtete. Bis heute besteht eine gewisse Spaltung zwischen den beiden an sich so nahe verwandten Fächern.

### 1.6.2 Wechselseitige Probleme

In der Folge diskutieren wir kurz einige Schwierigkeiten, die aus dieser Entwicklung resultieren, ohne Anspruch auf Vollständigkeit.

#### 1. Eine Zahl in der Mathematik ist nicht das Gleiche wie eine Zahl in der Physik

In der Mathematik bedeutet „1“: 1,00000..., also beliebig genau 1. Sie ist ein gedankliches Konstrukt.

In der Physik bedeutet „1“ mit keinen weiteren Angaben erst einmal gar nichts – es fehlt die Einheit. Wenn man weiters in Messwerten denkt, müssten Fehlergrenzen angegeben werden, ohne Angabe bedeutet z.B. „l=1 m“ eigentlich  $l=1 \text{ m} \pm 0,5 \text{ m}$ , wogegen „l=1,0 m“ meint, dass der Wert im Rahmen der verwendeten Möglichkeiten und mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit zwischen 0,95 m und 1,05 m liegt.

## 2. Wie kommt man in der Natur zu Zahlen?

Der Realitätsgehalt der Mathematik an sich ist ein wissenschaftstheoretisches Problem: Kommt den Zahlen eine eigene Realität zu, kommen sie in der Natur vor, oder sind sie lediglich Produkte des menschlichen Geistes, Zuordnungen etwa zu Mengen von Gegenständen oder Vorgängen? (siehe dazu: (16)).

Ohne hier auf diese Frage näher eingehen zu können, ein Aspekt ist auch für die Schule wesentlich: Der Vorgang der „**Quantisierung**“ bzw. „Homogenisierung“ – also die Zuordnung von Zahlen (bzw. allgemein: mathematischen Objekten) zu realen Gegebenheiten.

mathematische Objekte	reale Objekte
homogen, gleichartig unzeitlich unräumlich ideal	heterogen zeitlich räumlich real und kausal

Beispiel: die Schultaschen in einer Schulklasse.

*Man kann sie abzählen, ihnen also eine Zahl zuordnen. Dies ist aber nur möglich wegen einer geistigen Abstraktion: Was gilt als "**Schultasche**"? Auch Rucksäcke, Plastiksäcke etc ...? Je nach der Definition ergeben sich andere Zahlen.*

Eine physikalische Zahl ist ein mathematisches Objekt und hängt von einer Reihe von Festsetzungen ab. (siehe auch: (11))

## 3. Arten von Zahlen in der Physik

Was sind **Maßzahlen** für Zahlen?

Messwerte sind im Prinzip *natürliche Zahlen* - sie haben ja (nach der Messgenauigkeit) immer eine begrenzte Stellenzahl und können durch Wahl der Einheit "natürlich" werden. Z.B: 0,03 m -> 3 cm

Mittelwerte von Messwerten sind *rationale Zahlen*. Sie sind nur sinnvoll mit bestimmten Intervallen, die eine Wahrscheinlichkeit angeben, z.B: 3 cm +/- 0,05. Die statistische Sicherheit hängt wesentlich von der Anzahl der getätigten Messungen ab.

Maßzahlen sind reelle Zahlen. Sie sind im Prinzip theoretische Gebilde, z.B:  $5\text{m}/3\text{s} \rightarrow 5/3 \text{ m/s}$

### **Größen- und Zahlenwert- Kalkül**

Die Physik verwendet parallel (und meist unreflektiert) zwei Rechenmethoden:

Das Zahlenwert-Kalkül arbeitet mit (Maß)Zahlen (z.B:  $U = 35 \text{ V}$ ). Mit diesen kann "normal" gerechnet werden. Wesentlich sind dabei die verwendeten Einheiten. Man darf 4 Meter durch 2 Sekunden dividieren, es ergeben sich 2 m/s.

Davon wesentlich zu unterscheiden ist das Größen-Kalkül. Hier arbeitet man mit Funktionen und Funktionszusammenhängen (z.B:  $U = R \cdot I$ ). Obwohl es so scheint (Symbole +, -, , ...), handelt es sich dabei nicht um "normales" Rechnen, sondern um besondere Operationen, die so definiert sind, dass aus bestimmten Verknüpfungen von Größen neue entstehen - z.B:  $s/t = v$ . Hier wird Weg durch Zeit nicht "normal" dividiert! Eigentlich handelt es sich um eine Operation in einem *mehrdimensionalen Vektorraum*. (Siehe dazu: (12))

#### 4. Arten von Beispielen in Mathematik und Physik - Problemlösen

In der Mathematik werden Aufgaben meist zur Festigung und Übung erarbeiteter Formalismen eingesetzt. Häufig sind sie bereits in mathematischer Sprache gegeben.

In der Physik wird man kaum folgendes Problem finden:  $s=3 \text{ m}$ ,  $t=2 \text{ s}$ ;  $v=?$  Meist werden Aufgaben in Texte und Alltagszusammenhänge eingebunden und damit für Schüler/innen schwieriger (und unbeliebter – (10)). Dies führt zu einem Dilemma: Bloße Einsetzungsaufgaben sind - auch aus konstruktivistischer Sicht - unerwünscht („Die zerrechnete Physik“ – (6)), aber die Einbettung in Kontexte erhöht den Problemgehalt von Aufgaben für Schüler/innen.

Bei Textaufgaben ist zumeist klar (oder sollte sein), was gegeben und was gefragt ist. Die Schwierigkeiten liegen dann dazwischen: Welche Lösungsstrategien sind anwendbar (welche Gesetze, Formeln...)? Was ist wichtig, was kann weggelassen bzw. vereinfacht werden?

*Der deutsche Didaktiker Heinz Muckenfuß erzählte einmal über seine Tochter, dass sie sich weigerte, ein Lehrbuchbeispiel in Physik zu rechnen. Dabei ging es um den Abwurf eines Hilfspaketes aus einem Flugzeug. Unter der Angabe von Höhe und Fluggeschwindigkeit sollte (unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes) ein Auftreffpunkt berechnet werden. Nach Insistieren des Vaters begründete die Tochter endlich die Unsinnigkeit dieser Aufgabe: Bei fehlendem Luftwiderstand kann das Flugzeug ja gar nicht fliegen!*

Worauf sich das spezifische Augenmerk richtet, mag für Physiker/innen klar sein – für Schüler/innen kann es eine zusätzliche Abstraktionsleistung erfordern.

#### 1.6.3 Kontexte – sinnstiftend oder verwirrend?

Die Mathematik ist, so lange sie in ihren Strukturen, Konzepten und Formalismen bleibt, klar und logisch. Um aber mit Sinn für „normale“ Schüler/innen erfüllt zu werden, um also grundbildungsrelevant zu werden, muss sie ihre Fachinhalte in Alltags- und Weltbezüge einbetten.

Die Physik ist insofern komplexer, als sie bereits in sich wesentlich relativer ist, wie die Beispiele in 1.6.2 zeigen sollten. Die Abhängigkeit von Bezugssystemen und temporären Setzungen ist ein integrativer Bestandteil, Physik findet immer im Kontext statt.

Ein schönes Beispiel dazu führt L. Mathelitsch an (10).

*In der Mathematik ist ein Punkt etwas völlig Verschiedenes von einer Ebene. Das ist in der Physik nicht so – ein Punkt kann eine Ebene sein, es hängt vom Bezugssystem ab. Für eine Wurfbewegung in einem Zimmer etwa ist die Erde eine Ebene mit einem homogenen Gravitationsfeld. Betrachte ich das Sonnensystem als Ganzes,, ist es sinnvoll, die Erde auf ihren Schwerpunkt zu reduzieren.*

Im Ringen um das Verständnis dieser inneren Zusammenhänge bleiben wohl oft die äußeren (Alltags- und Weltverständnis) auf der Strecke, dies erscheint uns ein Grund für die geringe Beliebtheit des Faches Physik in der Schule zu sein.

#### 1.6.4 Wie können sich Mathematik und Physik sinnvoll ergänzen?

Fächerkoordinierte Sequenzen bringen auf jeden Fall einen Mehrwert für die Schüler/innen, sie erleichtern die Integration des Gelernten und geben diesem ein Mehr an Bedeutung. Was kann die Zusammenarbeit der beiden Fächer darüber hinaus bringen, in welche Richtung soll die Kooperation gehen?

##### 1. Werkzeug und Sinn

Die Mathematik braucht Kontexte – die Physik kann ihr diese liefern. Der Physikunterricht kann zeigen, wozu mathematische Konzepte tatsächlich gebraucht werden. Beispiele etwa zu Vektoren stehen im Physikunterricht in anderen und vielfältigeren Zusammenhängen als in Mathematik, wo sich ihr Sinn meist auf das Einüben von Kalkülen beschränkt.

Die Physik braucht mathematische Werkzeuge – die Mathematik kann ihr diese liefern. Die Komplexität und Vielfalt der Physik lässt nicht wirklich Zeit, sich mit Rechenvorgängen genauer zu befassen. Quantitative physikalische Beispiele sollten hauptsächlich im Mathematikunterricht gerechnet werden, die Physik liefert die Zusammenhänge und das Hintergrundwissen.

##### 2. Problemlösen

Das zweite übergreifende Ziel ist die Kompetenz im naturwissenschaftlichen Problemlösen.

*„Ein Problem ist gestellt, entweder in verbaler Form als Textaufgabe oder in Form eines Experiments, das man analysieren und erklären soll. Aus diesem, oft komplexen, Ansatz muss man zuerst eine Problemstellung klar formulieren. Um daraus Schlüsse zu ziehen, ist es oft nötig diese klare Problemstellung in mathematische Sprache zu kleiden. Als nächstes folgt die mathematische Lösung des Problems, was bei klarer Formulierung oft nicht die größte Schwierigkeit bereitet. Und danach sollte die mathematische Lösung wiederum in die Sprache des Eingangsproblems rückübersetzt werden. Dieser Prozess ist es, was unserer Meinung nach diese so positiv gesehene naturwissenschaftlichen Problemlösekompetenz ausmacht.“(10)*

Diese besondere Zugangsweise zu Problemstellungen hat zu den großen Erfolgen der Naturwissenschaften geführt und spielt auch in vielen Bereichen des Lebens eine große Rolle, die scheinbar abseits liegen, etwa in Wirtschaft und Politik.

##### 3. Weg zur Erkenntnis

Das dritte gemeinsame Ziel setzt noch „tiefer“ an im Sinne von *grundlegender*. Wir meinen das **Verständnis für den Prozess naturwissenschaftlicher Erkenntnisgewinnung**, in dem Abstraktion und Mathematisierung wesentliche Rollen spielen. Wir erinnern an das Zitat von E. Mach (S. 6):

*„Wo aber Mathematik angewandt wird, muss man sich die Bedeutung dieser Anwendung gegenwärtig halten und gelegentlich auch dem Schüler klar machen.“*

Hier bekommt die Mathematik einen weiteren Sinn: Als eine Methode, unsere Welt zu beschreiben und zu verstehen.

## 2 MATHEMATIK UND PHYSIK – IN DER 5. KLASSE KOORDINIERT UNTERRICHTEN

Anhand von vier thematischen Bereichen wurden wechselseitige Probleme und Zusammenhänge untersucht, die in konkrete Unterrichtsvorschläge mündeten.

### 2.1 Größenordnungen - Zehnerpotenzen

#### 2.1.1 Analyse

Die Thematik kommt in beiden Lehrplänen gleich zu Beginn der inhaltlichen Abschnitte vor. In den Lehrbüchern werden parallel etliche Begriffe verwendet:

*Zehnerpotenzschreibweise, Exponentenschreibweise, Gleitkommadarstellung, scientific notation (alle (1)), powers of ten (2).*

In (1) werden physikalische Begriffe vorausgesetzt: Maßzahl (S. 16), Maßeinheit (S. 14), Masse (S. 14), Wellenlänge (S. 16), die Einheiten  $\text{g/cm}^3$ ,  $\text{N/m}^2$  (S. 17), GW, TWh (S. 12)

Die Mathematik ist interessiert daran, eine Anzahl von Beispielen aus vielen Bereichen der Welt (Alltag, Wirtschaft, Wissenschaften...) zu bringen, an denen die Rechentechniken geübt werden können. Dies ist auch insofern sinnvoll, da dadurch die Mächtigkeit der mathematischen Konzepte deutlich werden kann, indem die Schüler/innen die vielfältige Anwendbarkeit sehen. Aus der **Sichtweise des koordinierten Vorgehens** erscheint es jedoch nicht günstig, gleich Beispiele aus allen möglichen Teilgebieten der Physik zu bearbeiten, da die Schüler/innen mangels begrifflicher Bezüge diese als reine Rechenaufgaben sehen müssen. Besser wäre es, immer wieder einmal im Mathematik-Unterricht das Zehnerpotenzen-Rechnen zu üben, wenn gerade in Physik mit großen Zahlen gearbeitet wird - so etwa bei Energien (eV - GWh) oder Wellenlängen/Frequenzen.

Es zeigte sich, dass Vergleiche von Zehnerpotenzen ("Wie viel mal ist 1 km mehr als 1 nm?") einem großen Prozentsatz der Schüler/innen auch nach längerem Üben Probleme bereite (Siehe Schularbeitsbeispiele Mathematik, Anhang → Seite 38 und Lernzielkontrollen Physik, -> Seite 36). Auch in dieser Hinsicht scheint es ratsam, immer wieder auf diese Art des Umgangs mit Zahlen einzugehen, ist er doch für die Naturwissenschaften eine ausgesprochen grundlegende Technik.

#### 2.1.2 Umsetzung im Unterricht

Aus den oben genannten Gründen erschien uns eine weitestgehende Beschränkung auf Längenmaße und Raummaße sinnvoll – um das Ziel des Physik-Lehrplans zu stützen und die Begriffsverwirrung zu vermindern. Damit waren die konkreten inhaltlichen Bereiche:

**Physik:** Vorsilben und Abkürzungen; Übersicht über Größenordnungen im Universum - vom Elementarteilchen bis zum Kosmos

**Mathematik:** Einführung und Begründung der Exponentialschreibweise, Üben der Darstellung; Rechnen mit Zehnerpotenzen

-> Anhang, Seite 25

## 2.2 Funktionen - Kinematik

### 2.2.1 Analyse

Nach Einführung und Definition linearer Funktionen ging es im Mathematikunterricht darum, lineare Zusammenhänge in verschiedenen Textaufgaben zu erkennen und von anderen (z.B. quadratischen) Beziehungen zu unterscheiden. Dazu passten die Zugänge zur Kinematik, die für „einfache“ Bewegungstypen genau diese Funktionen verwendet.

Während aber die Mathematik **Funktionsterme** verwendet und auf Definitions- und Wertebereich achtet, werden in Physik **Formeln** (=) geschrieben.

Es schien sinnvoll zu zeigen, dass eine einfache Formel wie  $s=v \cdot t$  eigentlich eine lineare Funktion darstellt und auch als Geradengleichung bzw. Zuordnungsvorschrift gelesen werden kann ( $y=k \cdot x + d$  oder  $f:x \rightarrow k \cdot x + d$ ). Darin bekommt der Anstieg  $k$  die Bedeutung der Geschwindigkeit,  $d$  entspricht nichts anderem als der Wahl des Startpunktes bzw. des Koordinatensystems. Dieses wird in der Physik meist so gelegt, dass die mathematischen Ausdrücke möglichst einfach werden. Dadurch wird allerdings erschwert, den Zusammenhang zwischen den beiden Formulierungen zu erkennen. Auch die Unterscheidung zwischen unabhängiger und abhängiger Größe wird in Physik eher implizit getroffen – in der klassischen Bewegungslehre wird die Zeit automatisch als unabhängig (x-Achse) betrachtet.

Mathematisch gesehen bedeutet der Anstieg die Änderung der Funktionswerte (y-Werte) bei der Änderung der x-Werte um 1. Er wird aber auch als Differenzenquotient  $\Delta y / \Delta x$  interpretiert, was der physikalischen Praxis wesentlich näher kommt.

### 2.2.2 Umsetzung im Unterricht

Es wurde versucht, das "Bergab-Rollen" (Wagen auf Fahrbahn) nach G. Galilei mathematisch zu erfassen. Es sollte klar werden, dass Galilei die **Geschwindigkeit auf die Zeit bezog** (und nicht auf den zurückgelegten Weg), da sich hier eine **lineare Beziehung** ergibt (Geschwindigkeit - Weg ist dagegen eine Wurzelfunktion). Bei der idealen gleichmäßig beschleunigten Bewegung ergibt sich in der Folge die **quadratische Funktion** als Beziehung zwischen zurückgelegtem Weg und benötigter Zeit.

Die Aufgabenstellung des ersten Versuches war, Wagen oder Kugeln über Rampen hinabrollen zu lassen mit der Frage: Wie schnell ist das Objekt auf verschiedenen Punkten? Wie ändert sich die Geschwindigkeit? Daraus ergab sich dann die Notwendigkeit, Weg- und Zeitabschnitte zueinander in Beziehung zu setzen, um möglichst genaue Geschwindigkeitswerte zu erhalten.

Interessanterweise bezogen die Schüler/innen fast durchwegs die Messung auf Wegstücke. Wie im Sport üblich, wurden feste Streckenintervalle vorgegeben, auf welchen die Zeit gestoppt wurde. Dies legte auch nahe, die Geschwindigkeitswerte auf die Strecke zu beziehen. Durch vergleichende Auswertungen (v-t gegen v-s Diagramme) versuchten wir zu zeigen, dass sich im ersten Fall die einfachere Funktion als Annäherung ergibt.

Das Experiment wurde in einer Mathematik-Stunde ausgewertet: Wie kann man aus real gemessenen s/t-Werten Geschwindigkeiten berechnen und die Bewegung durch Funktionen annähern? Besonders elegant lassen sich solche Vergleiche am PC mit einer Tabellenkalkulation durchführen (-> Auswertung mit EXCEL, Anhang, S. 28)

In der Folge ging es um **Fallbewegungen** - aus mathematischer Sicht **quadratische Funktionen**. Beispiele waren Wurfbewegungen im Sport und Raumflugbewegungen (aktuelles Thema: Raumsonde Cassini - Landung von Huygens auf Titan).

Ein weiterer Schwerpunkt war die Erstellung und Interpretation von **Bewegungsdiagrammen**. (→ Stundenplanung Mathematik → Anhang Seite 28, Übungsbeispiele Physik → Seite 29)

## 2.3 Trigonometrie - Entfernungsmessung, Kräftezerlegung

### 2.3.1 Analyse

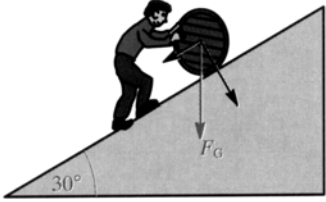
Die Winkelfunktionen wurden als Längenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck eingeführt und in der Folge auch am Einheitskreis gedeutet. Physiknahe Anwendungen waren Vermessungsaufgaben, Aufgaben mit Steigungswinkeln und Neigungen. Dazu hätte sich für die Physik das Thema Entfernungsmessung im Weltall (Trigonometrische Parallaxe) angeboten, konnte jedoch aus organisatorischen Gründen nicht parallel durchgeführt werden.

Eine umgesetzte Möglichkeit der Koordination betraf die Bestimmung von Kraft- oder Beschleunigungskomponenten auf der schiefen Ebene. Dieser Bereich bereitet kaum Probleme, die Zugänge und Methoden sind in Mathematik und Physik ähnlich.

### Alltagsbezug – Realitätsnähe: eine Gegenüberstellung

Ein Standardbeispiel aus (1), S. 169:

**11.**  
Auf einer schiefen Ebene, die unter  $\alpha = 30^\circ$  ansteigt, soll ein Fass mit der Gewichtskraft  $F_G = 1\,200\text{ N}$  hinaufgerollt werden. Wie groß sind die Kraftkomponenten, die parallel und senkrecht zur schiefen Ebene wirken?



Der Realitätsbezug dieser Aufgabe scheint eher ein künstlicher zu sein, kommt doch diese Situation in der Welt der Schüler kaum vor. Außerdem wird nicht wirklich auf die Situation eingegangen, sie wird lediglich als „Hülle“ für die Rechnung benutzt.

**Physikalische Voraussetzungen wären:** Kraft, Kräftezerlegung, Newton.

**Physikalische Fragen dazu könnten sein:**

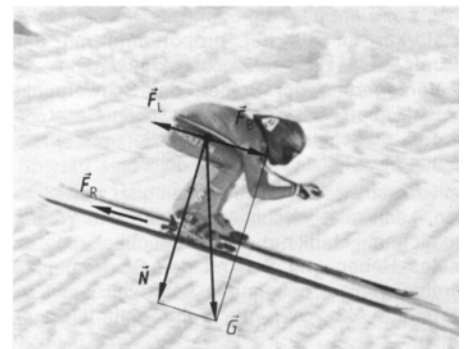
Ist das ein schweres Fass? Kann ein Mann 1200 N auf dieser Steigung hochschieben?

**Alternativen:**

Das gleiche mathematische Kalkül braucht man für **Schifahren** oder **Radfahren** (bergauf/bergab).

(Bild aus: *Mathelitsch: Sport und Physik, hpt, S. 36*)

Schüler kennen diese Situation aus eigener Erfahrung oder aus den Medien. Sie ist positiv besetzt und wird mit Leistung, Schnelligkeit und Erfolg assoziiert.



## Mögliche mathematische Fragestellungen wären:

Welche Kraft beschleunigt den Schifahrer (80 kg) bei einer Steigung von z.B. 30%?

Die **Hahnenkammabfahrt** (Kitzbüchel) hat eine Streckenlänge von 3510 m und weist eine Höhendifferenz von 860 m auf. Welche durchschnittliche Steigung hat sie? Wie groß ist die durchschnittliche Kraft in Bewegungsrichtung?

## Mögliche physikalische Fragen:

Welche Kräfte treten auf? Wovon hängen diese Kräfte ab?

Beschleunigt ein schwerer Läufer schneller als ein leichter?

Wie sieht die Kräftebilanz aus, wenn der Fahrer mit konstanter Geschwindigkeit gleitet?

Wie schnell kann ein Schifahrer werden?

Das erste Beispiel wird wohl auch deswegen verwendet, da es eigentlich ein statisches Problem darstellt und daher einfach zu lösen ist. Beim Schifahren kommt unweigerlich die Dynamik der Bewegung ins Spiel, Reibungskräfte spielen eine entscheidende Rolle. Realitätsnahe Probleme haben oft den Nachteil höherer Komplexität.

## 2.3.2 Umsetzung im Unterricht

Zur Kräftezerlegung wurden zwei Versuche an der schiefen Ebene (Fahrbahn) in Physik durchgeführt und in Mathematik ausgewertet:

*Messung der beschleunigenden Kraft auf 2 Arten - Vergleich mit einer theoretischen Berechnung - Bestimmen der Erdbeschleunigung. Die Beschreibung mit Protokollvorlage für die Schüler/innen findet sich im Anhang (Seite 32)*

*Messung des Haftreibungskoeffizienten (nach (2), S. 52)*

Ein wesentliches Ziel dieser Arbeit war, reale Messergebnisse mit theoretisch berechneten Werten zu vergleichen.

## 2.4 Vektoren - Impuls

### 2.4.1 Analyse

In diesem Bereich waren die grundsätzlichen **Unterschiede** zwischen Mathematik und Physik am stärksten zu sehen. Lehrbuch (1) bringt im umfangreichen Kapitel Vektoren kein einziges Beispiel aus der Physik. In (2) wird nur einmal kurz die mathematische Schreibweise von Vektoren (Zahlenpaar) in der Ebene benutzt. Die **Mathematik** arbeitet mit Vektoren in sehr abstrakter Art, als Zahlenpaare (Menge von Pfeilen gleicher Richtung, Orientierung und Länge), der Ortsvektor ist ein Repräsentant dieser Menge und dient dazu, Punkte im Koordinatensystem festzulegen. In der **Physik** werden Vektoren als konkrete Pfeile benutzt und im Allgemeinen nicht auf ein Koordinatensystem bezogen, sondern auf ihre Angriffspunkte bzw. Objekte. Oft werden die Koordinaten so gelegt, dass man letztlich mit Beträgen rechnen kann.

Es ist erstaunlich, dass gerade an diesem Thema von Seiten der Lehrplan- und Lehrbuchautoren kaum an eine Koordination gedacht wurde. Gehören doch in der Physik die Unterscheidung von skalaren und vektoriellen Größen sowie die entsprechenden mathematischen Methoden "zum täglichen Brot". Dem Mathematik-Unterricht wiederum könnte die Arbeit mit vektoriellen Größen der Physik vielfältige Begründungszusammenhänge liefern - gerade die Vektorrechnung scheint bei Schüler/innen nicht beson-

ders beliebt zu sein, sie ist eines jener Gebiete, das oft zu Fragen wie "*Wozu brauchen wir das eigentlich ...?*" Anlass gibt.

### **2.4.2 Umsetzung im Unterricht**

Am Thema **Stoßgesetze** versuchten wir, beide Sichtweisen zu verbinden. In Physik wurden einfache Versuche mit Münzen durchgeführt, (Impuls - Impulserhaltung), die dann in Mathematik ausgewertet wurden: Die Impuls Pfeile wurden in ein Koordinatensystem gebracht und vektoriell addiert. So wurde auch das Reflexionsgesetz erarbeitet.

Die ausgeführte Stundenplanung mit der Versuchsanleitung für die Schüler/innen findet sich im Anhang (Seite 34), ebenso eine Stundenplanung aus Mathematik zur Einführung des Vektorbegriffs (Seite 33).

## 3 AUFGABEN - UNTERSUCHUNGEN

### 3.1 Untersuchung der Lehrbücher

Es wurden jeweils wechselseitig jene Aufgaben des Lehrbuchs eines Faches untersucht, die Inhalte des anderen betreffen. So erhielten im Fach Mathematik die Schüler einen Fragebogen, der Aufgaben des Physik-Lehrbuchs (2) auflistete mit dem Auftrag, „gute“ und „schlechte“ Aufgaben zu nennen und diese Wahl auch zu begründen. Gengleich gilt das gleiche für Physik. Der Fragebogen findet sich im Anhang (Seite 39)

#### 3.1.1 Aufgaben des Physik-Lehrbuchs mit mathematischen Bezügen

##### Warum ist eine Aufgabe „gut“? Was gefällt dir daran?

Die Schüler/innen nannten 63 Begründungen für gute Aufgaben, diese lassen sich in vier Bereiche gliedern.

Der erste Bereich betrifft **formale Aspekte**, wie: leicht verständliche Aufgabenstellung, nicht zu viel Text, klare Formulierungen, einfache Skizzen, nicht zu lang. Von den 63 Begründungen entfallen 29, das sind 46 %, auf den oben genannten Bereich.

*„Angaben sollten schnell zu verstehen sein, außerdem sollte es nicht allzu viel Rechenaufwand geben.“*

Die zweite Kategorie umfasst den **Alltagsbezug**, die **Realitätsnähe** mit Begründungen der Art: im alltäglichen Leben anwendbar, realistisch, Aufgaben über Autos, Beispiele aus dem Sport. 19 Begründungen (30%) können diesem Teil zugerechnet werden.

*„Ein Beispiel ist dann gut, wenn es realitätsbezogen ist und man es auch anwenden kann.“*

Für 12 Schüler/innen ist es wichtig, dass die Aufgabenstellungen **interessant** beziehungsweise **spannend** sind, das sind 19% aller Begründungen.

*„Eine Aufgabe ist dann gut, wenn sie logisch, realitätsnah und einfach ist.“*

Ein Teil der Begründungen bezieht sich auf die **Bewältigbarkeit von Aufgaben**. Von drei Schülern/-innen (4,8%) kam, dass ein Beispiel dann gut ist, wenn man es schafft, das Beispiel zu lösen.

*„Ein Beispiel ist dann gut, wenn man es auch schafft, das Beispiel zu lösen. Und selbst seinen eigenen Lösungsvorgang verwendet.“*

##### Warum ist eine Aufgabe „schlecht“? Wie könnte man sie verbessern?

Begründungen für „schlechte“ Aufgaben lassen sich auf ähnliche Weise einteilen wie solche für „gute“.

Insgesamt wurden 48 Begründungen angeführt, wobei der größte Teil dem **formalen Aspekt** zugeordnet werden kann, das sind 29 (60,4%). Eine der Antworten:

*„Eine Aufgabe ist dann schlecht, wenn sie kompliziert beschrieben ist und zu viel Informationen in einen Satz gequetscht werden.“*

Der zweitgrößte Bereich der Begründungen bezieht sich auf den **Alltagsbezug**, wobei bei 13 Nennungen (27%) ein Beispiel dann für schlecht gehalten wird, wenn es *unrealistisch* oder *im Alltag nicht anwendbar* ist.

*„Meiner Meinung nach ist eine Aufgabe schlecht, wenn man mit dem Beispiel nichts anfangen kann, weder im Alltag noch bei anderen Aktivitäten.“*

In Bezug auf das Können der Schüler/innen merken drei (6%) an, dass eine Aufgabe schlecht ist, wenn sie **zu schwer** beziehungsweise **zu kompliziert** zu lösen ist.

Für weitere drei (6%) ist eine Aufgabe schlecht, wenn sie **uninteressant** oder **langweilig** ist.

*„Eine Aufgabe ist schlecht, wenn sie unlogisch, bezugslos und nur durch komplizierte Methoden lösbar ist.“*

Diesbezüglich wurde auch nach **Verbesserungsvorschlägen** gefragt. Folgende Punkte wurden angegeben:

- Beispiele sollen aktuellen Bezug haben
- Aufgaben sollten kürzer und interessanter gestaltet werden
- Anwendbarkeit der Aufgaben kontrollieren
- Angaben verständlicher machen
- Deutlich machen was verlangt ist

### **Die bestbewerteten Aufgaben**

Zwei Aufgaben des Physiklehrbuchs (2) wurden von jeweils 6 Schülern (24%) als „gut“ gewertet: Beispiel: „Autounfall“ (S. 40) und Beispiel „Zehnerpotenzen“ (S. 6). Bei beiden handelt es sich um durchgerechnete Beispiele (mit Lösung). Solche folgen auch auf den weiteren Plätzen und wurden offenbar von den Schülern bevorzugt. (→ Anhang Seite 41)

### **3.1.2 Aufgaben des Mathematik-Lehrbuchs mit physikalischen Bezügen**

#### **Warum ist eine Aufgabe „gut“? Was gefällt dir daran?**

Ähnlich wie bei der ersten Untersuchung lassen sich die Begründungen in vier Aspekte teilen:

1. Formale Aspekte: Klare Aufgabenstellung, verständliche Angabe, Unterstützung durch Grafik, kurz
2. Realitätsbezug: Anwendbar, Alltagsrelevant
3. Bewältigbarkeit
4. Persönliches Interesse

Die 25 Schüler/innen gaben insgesamt (mit Mehrfachnennungen) jeweils 36 positive bzw. negative Begründungen. Diese verteilten sich wie folgt:

1. Formale Aspekte: 12 (33%)

*„Wenn die Angabe logisch ist und leicht zu verstehen.“*

2. Realitätsbezug: 11 (30%)

*„Ich persönlich rechne lieber mit Beispielen bei denen man nicht gleich von vorne herein weiß, dass sie sowieso im Leben nie gebraucht werden. Besser wäre es „echte“ Beispiele zu nehmen, aus dem Leben gegriffen.“*

3. Bewältigbarkeit: 8 (22%)

*„Schlecht: Kompliziertheit. Zu schwer oder zu leicht ist schlecht!“*

4. Interesse: 5 (14%)

*„Weil ich mich für diese Themen interessiere, drum ist das Beispiel auch gut.“*

### Die bestbewerteten Aufgaben

Von den befragten Aufgaben des Mathematik-Lehrbuchs wurden 137/1 (7) und 123/1 (6) am besten bewertet.

Beide Aufgaben haben einen Alltagsbezug (Höhe eines Turmes bzw. Vergleich Fußgänger – Radfahrer) und waren im Mathematik-Unterricht bereits behandelt worden. 137/1 ist im Buch durchgerechnet. (→ Anhang Seite 41)

## 3.2 Evaluation einer Lernzielkontrolle Physik

Die zweite Lernzielkontrolle im Fach Physik (siehe Anhang Seite 36) wurde in beiden beteiligten Klassen einer kleinen Auswertung unterzogen. Abgefragt wurden der subjektiv empfundene Schwierigkeitsgrad sowie das Interesse (jeweils auf Skalen von 1-6)

### Tatsächlicher Schwierigkeitsgrad (Prozent der möglichen Maximalpunkte)

Klasse	Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Zusatzaufgabe
5.a	76%	69%	52%	50%
5.c	73%	52%	43%	36%

Die 5.a-Klasse schnitt durchwegs besser ab, was allerdings durch einen am gleichen Tag stattfindenden Geografie-Test in der 5.c-Klasse erklärbar ist.

Die Aufgaben wurden von 1 bis 4 real immer schwerer lösbar. Die Zusatzaufgabe (4, (Vergleich von Zehnerpotenzen)) war identisch mit einer der ersten Lernzielkontrolle und erreichte zwar bessere Werte als bei dieser, jedoch konnten nur 50% bzw. gar nur etwa ein Drittel diese richtig lösen – dies trotz zwischenzeitlicher Wiederholungen in Mathematik bzw. Physik.

### Subjektiv empfundener Schwierigkeitsgrad (1: sehr leicht – 6: sehr schwer)

Klasse	Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3
5.a	2,7	3,6	3,4
5.c	2,7	3,8	4,2

Das Ergebnis zeigt insgesamt eine realistische Selbsteinschätzung, insbesondere in der 5.c-Klasse. Die 5.a bewertete Aufgabe 3 (Wurfbeispiel) als leichter, als sie dann tatsächlich war.

### Interesse (1: uninteressant – 6: sehr interessant)

Klasse	Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3
5.a	3,6	3,6	3,6
5.c	3,6	3,1	3,8

Im Gesamtbild sind keine wesentlichen Abweichungen vom mittleren Interesse (3,5) zu sehen. Die Einzelwertungen der Schüler streuen jedoch stark, jedes der 3 Beispiele hat Bewertungen von 1 bis 6 – die sich im Klassendurchschnitt aufheben. In beiden Klassen gab es auch Schüler/innen, die alle Aufgaben mit 6 bzw. alle mit 1 beurteilten.

## 3.3 Wie interessant sind Bewegungsaufgaben?

Dies war ein **Semesterprojekt** einer Gruppe von Student/-innen im **Schulpraktischen Seminar 2**. Es wurden Aufgaben zur Bewegungslehre nach verschiedenen Kriterien ausgesucht und Schüler/innen in Gruppen zur Bearbeitung vorgelegt. Die Schüler/innen mussten die Aufgaben einschätzen und bewerten (Fragebogen), Lösungen versuchen und diese präsentieren.

### 3.3.1 Allgemeine Vorbereitung

In der Vorbereitung wurden den Student/-innen verschiedene Aufgaben zur Bewertung gegeben, um **Kriterien** zur Einschätzung und Beurteilung solcher Beispiele zu entwickeln. (13)

#### Kriterien für "gute" Aufgaben

- Alltagsbezug, Zusammenhang mit der Lebenswelt der Schüler
- Offene/Geschlossene Aufgabenstellung: Sind mehrere Lösungswege möglich? Welche Aktivitäten werden gefordert?
- Einsetzbarkeit: flexibel? In verschiedenen Phasen bzw. Methoden?
- Gibt es mehrere Zugangsweisen? Z.B. experimentell, mathematisch, grafisch, halb-quantitativ...
- Schwierigkeitsgrad: Gibt es Lösungsmöglichkeiten auf unterschiedlichen Niveaus? (Unterstufe – Oberstufe, zusätzliche Herausforderung für Begabte)
- Formulierung und Präsentation: Anregend? Klar?
- Begrifflichkeit: Wie viele Fachbegriffe sind enthalten? Welche sind zur Lösung notwendig?

#### Grundfrage:

Was will man mit der Aufgabe? Für welche Schüler (alle, gute ...)? Eindeutiges Ergebnis, eine Zahl, Abschätzung, Diskussion, Denkanstoß ...?

Anhand eines Artikels von Thomas Stern (4) wurde versucht, "normale" Aufgaben aus den TIMSS- und PISA-Studien zu analysieren bzw. aufzubereiten.

### 3.3.2 Projektplanung, -durchführung und -evaluation

Nach der Entscheidung und grundsätzlichen Zielüberlegungen sammelten die Student/innen verschiedenste Aufgaben aus dem Bereich der Bewegungslehre. Diese wurden dann in sechs Kategorien eingeteilt:

- *Diagramm zeichnen*
- *Diagramm interpretieren*
- *Verständnisaufgabe*
- *Aufgabe mit hohem Rechenaufwand*
- *„Rechnen&Verstehen“*
- *Allgemeine (schwere) Aufgabe*

Daraus erstellte das Team fünf Aufgabenblätter mit je einem Beispiel aus jeder Kategorie. Zusätzlich wurden Fragebögen entwickelt, um zu jeder gestellten Aufgabe Einschätzungen der Schüler/innen bezüglich Interesse und Schwierigkeitsgrad zu bekommen. (Beispiel für ein Aufgabenblatt -> Anhang S. 42)

In einer Doppelstunde wurde die 5.a-Klasse in zehn Gruppen mit je drei Schüler/innen eingeteilt. Jeweils zwei Gruppen erhielten das gleiche Aufgabenblatt mit der Anweisung, zuerst gemeinsam den Schwierigkeitsgrad – noch vor der versuchten Lösung – abzuschätzen. Nach der intensiveren Beschäftigung mit den Beispielen wurden die Bewertungsbögen ausgefüllt. Zuletzt kürte jede Gruppe ein „bestes“ Beispiel ihres Blattes und präsentierte dieses (Angabe mit Lösung) auf einem kleinen Plakat.

Die Auswertungen zeigten, dass etwa das Interesse an einer Aufgabenstellung nicht direkt mit dem empfundenen Schwierigkeitsgrad zusammenhängt. Ein größerer Alltagsbezug führte jedoch durchgängig zu besserer Bewertung der Beliebtheit einer Aufgabe.

Eine kurze Zusammenfassung der Ergebnisse wurde (mit einer Projektbeschreibung und allen Unterlagen) auf einer Website veröffentlicht (<http://rath.brgkepler.at/mp5>).

*„Leichte Aufgaben sind nicht zwingendermaßen die beliebten Beispiele, da sich viele Schüler bei zu leichten Aufgabenstellungen langweilen.*

*Die Aufgabenstellung kommt oft nicht klar an.*

*Es ist hilfreich, wenn sich Schüler etwas unter der Aufgabe vorstellen können (mit dem Alltag verbinden).*

*Die Schüler setzen sich nicht genug mit dem Ergebnis auseinander. Nach einer Aufgabe sollte noch eine klare Fehlereinschätzung passieren (kann dieses Ergebnis überhaupt stimmen?). Manche Aufgaben erschienen als sehr leicht, sind aber falsch gerechnet worden.*

*Aufgaben mit einer Auswahl von Lösungen sind sehr beliebt.*

*Oft gingen Meinungen verschiedener Gruppen über ein bestimmtes Beispiel, welches beide Gruppen bearbeiteten, auseinander. Was die einen als leicht empfanden, wurde von den anderen als schwer geschätzt.“*

Abschließend wurde den Schüler/innen eine Übersicht über die Resultate sowie die Bewertung ihrer Arbeit (im Rahmen der Leistungsbeurteilung) gegeben bzw. mit ihnen diskutiert.

## 4 RESÜMEE UND AUSBLICK

Mathematik und Physik sind von Methoden, Zielen und Ansprüchen her in der Schule weiter voneinander entfernt, als wir erwartet hatten. Dies gilt trotz der vielen Bezüge und Überschneidungen von Inhalten wie auch Aufgaben. Wir mussten erfahren, dass die SchülerInnen gewöhnt sind, zwischen den Fächern so vollständig geistig „umschalten“, dass ähnliche Inhalte einander nicht beeinflussen, also Erkenntnisse auch nicht integriert werden.

Der erste positive Effekt des Projekts war der Einblick in das jeweils andere Fach, die Erkenntnis von Ähnlichkeiten, Parallelitäten und Unterschieden. Wir passten Methodiken und Begrifflichkeiten aneinander an bzw. wiesen auf die Verwendung im anderen Fach hin.

Schon allein diese lose Zusammenarbeit bewirkte bei den Schüler/innen offenbar die Einsicht, dass jedes Fach auch im Hinblick auf das andere zu sehen ist. Es bestätigten sich Erfahrungen unseres ersten fächerkoordinierten Projekts (18): Wenn Schüler/innen bemerken, dass Lehrer/innen zusammenarbeiten, wenn nur Hinweise gemacht werden und Absprachen sichtbar werden, werden erste Aha-Effekte erzielt.

### Projekte

Die durchgeführten parallelen Sequenzen verstärkten diese Effekte und werden von uns insofern als erfolgreich gesehen. Sie können aber erst den Anfang darstellen. Unser Ziel wird sein, die Arbeit in den nächsten Jahren weiterzuführen und in ihrer Qualität zu steigern. An die Seite der weiter durchgeführten fächerkoordinierenden Sequenzen sollte pro Schuljahr ein gemeinsames Projekt treten, in dem die Fächergrenzen stärker überschritten werden können und wo auch grundsätzliche Fragen (etwa nach dem Stellenwert der Mathematisierung innerhalb der naturwissenschaftlichen Methode) angesprochen werden können.

### Problemlösen

Ähnliches lässt sich für unseren zweiten Schwerpunkt sagen, die Untersuchungen über Aufgabenqualität. Sie waren durchaus zufrieden stellend und bestätigten Ergebnisse aus der Literatur. Hier muss der nächste Schritt in Richtung (naturwissenschaftliches) Problemlösen gehen, was ebenfalls Formen intensiverer Zusammenarbeit bedarf. Ziel wird auch sein, den Vorgang an sich mit Schüler/innen zu thematisieren und zu reflektieren, um die Rolle mathematischer Konzepte und Techniken innerhalb des Problemlösens besser verstehbar zu machen.

## 5 LITERATUR

- (1) R. Geretschläger, H. Griesel, H. Postel: Elemente der Mathematik 5 Dorner-Verlag 2004
- (2) A. Jaros, A. Nussbaumer u.a.: Basiswissen Physik-compact 1 Öbv-hpt 2004
- (3) G. Malle u.a.: Mathematik verstehen 5. Klasse. öbv&hpt
- (4) Th. Stern: Aufgaben über Aufgaben. In: Unterricht Physik 13(2002)/67, S. 12ff
- (5) M. Anton u.a.: Ein dynamisches Konzept für mathematisch-naturwissenschaftliche Grundbildung. IMST<sup>2</sup>-Newsletter, Jahrgang 2/8, 2003/04. Herausgegeben vom IFF im Auftrag des bm:bwk
- (6) H. Dittmann, H. Näpfel, W. Schneider: Die zerrechnete Physik. In: Wege in der Physikdidaktik, Band 1. Palm&Enke, Erlangen 1991
- (7) K. Luchner: Physikalische Aufgaben – nicht nur Rechnereien! In: Wege in der Physikdidaktik, Band 3. Palm&Enke, Erlangen 1993
- (8) G. Ehlers: Mathematik und physikalische Wirklichkeit. In: Der Mathematikunterricht Jg. 6 (1960), Heft 4, S. 11ff
- (9) K. Liebers: Zu einigen Problemen der Anwendung der Mathematik im Physikunterricht. In: Physik in der Schule, 10/1978, S. 413ff
- (10) L. Mathelitsch: Mathematik und Physik. Manuskript (unveröffentlicht) zu einer gleichnamigen Lehrerfortbildungsveranstaltung, PI Steiermark 2003
- (11) K. v. Oy: Was ist Physik? Klett, Stuttgart 1977
- (12) E. Röhl: Bedeutung von Zahlausdrücken. In: Der Mathematikunterricht, Heft 4/1984, S. 92ff
- (13) <http://blk.mat.uni-bayreuth.de/material/db/45/aufgaben.html>
- (14) E. Mach: Entwurf einer Lehrinstruction für den physikalischen Unterricht an Mittelschulen. In: Verordnungsblatt des Ministeriums für Cultus und Unterricht, 1879, S. 298ff
- (15) H. Graßmann: Das Top Quark, Picasso und Mercedes-Benz. Rowohlt Berlin 1999
- (16) W. Weiss: Zahlen, Ziffern und Einheiten – die Welt als Produkt von Gleichungen? In: Wissenschaftliche Nachrichten, bm:bwk 11/12/2000, S. 3ff
- (17) F. Reif: Wie kann man Problemlösen lehren? In: PU (Der Physikunterricht) 1/83, S. 51ff)
- (18) W. Knechtl, G. Rath, S. Sprenger: Fächerkoordinierender Unterricht – Beiträge zur Grundbildung? IMST<sup>2</sup>-Projektbericht, Graz 2004

# 6 ANHANG

## 6.1 Lehrplanvergleich

Mathematik	Physik
<b>Allgemeiner Teil</b>	
<p>Die mathematische Beschreibung von Strukturen und Prozessen der uns umgebenden Welt, die daraus resultierende vertiefte Einsicht in Zusammenhänge und das Lösen von Problemen durch mathematische Verfahren und Techniken sind zentrale Anliegen des Mathematikunterrichts.</p> <p><i>Erkenntnistheoretischer Aspekt:</i></p> <p>Mathematik ist eine spezielle Form der Erfassung unserer <b>Erfahrungswelt</b>; sie ist eine spezifische Art, die Erscheinungen der Welt wahrzunehmen und durch Abstraktion zu verstehen; Mathematisierung eines realen Phänomens kann die Alltagserfahrung wesentlich vertiefen</p> <p>Viele <b>Naturphänomene</b> lassen sich mit Hilfe der Mathematik adäquat beschreiben und damit auch verstehen; Die Mathematik stellt eine Fülle von Lösungsmethoden zur Verfügung, mit denen Probleme bearbeitbar werden.</p>	<p>Diagramme erstellen und interpretieren können</p> <p>Einsicht in die Notwendigkeit und Mächtigkeit symbolischer Beschreibungen gewinnen</p> <p><b>Mathematisierung</b> als spezifische physikalische Arbeitsweise bedeutet das Durchlaufen verschiedener Stufen zunehmender Abstraktion von der Gegenstandsebene über bildliche, sprachliche und symbolische Ebenen zur formal-mathematischen Ebene. Für das Verständnis sind die nichtformalen Ebenen wichtig, während der mathematischen Ebene für die Anwendung (Vorhersage) besondere Bedeutung zukommt.</p>
<b>Lehrstoff</b>	
<p><b>5. Klasse:</b></p> <p><b>Zahlen und Rechengesetze</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Reflektieren über das Erweitern von Zahlenmengen an Hand von natürlichen, ganzen, rationalen und irrationalen Zahlen</li> <li>- Darstellen von Zahlen im dekadischen und in einem nichtdekadischen Zahlensystem</li> <li>- Verwenden von Zehnerpotenzen zum Erfassen von sehr kleinen und sehr großen Zahlen in anwendungsorientierten Bereichen</li> <li>- bewusstes und sinnvolles Umgehen mit exakten Werten und Näherungswerten</li> <li>- Aufstellen und Interpretieren von Termen und Formeln, Begründen von Umformungsschritten durch Rechengesetze</li> <li>- Arbeiten mit Primzahlen und Teilern, Untersuchen von Teilbarkeitsfragen</li> </ul> <p><b>Gleichungen und Gleichungssysteme</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Lösen von linearen und quadratischen Gleichungen in einer Variablen - Lösen von linearen Gleichungssystemen in zwei Variablen, Untersuchen der Lösbarkeit dieser Gleichungssysteme, geometrische Interpretation</li> <li>- Anwenden der oben genannten Gleichungen und Gleichungssysteme auf inner- und außermathematische Probleme</li> </ul>	<p><b>5. und 6. Klasse:</b></p> <p>Die Schülerinnen und Schüler sollen folgende physikalische <b>Bildungsziele</b> erreichen:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- mittels einfacher Schülerexperimente insbesondere die Fähigkeit zum Beobachten, Beschreiben und Berichten sowie Planen, Durchführen und Auswerten entwickeln</li> <li>- <b>Größenordnungen</b> im Mikro- und Makrokosmos kennen und unsere Stellung im Universum einschätzen können</li> <li>- <b>Grundlagen der Elektrizitätslehre</b> (einfacher Stromkreis, Spannung, Strom, elektrischer Widerstand, elektrische Energie und Umgang mit elektrischen Messgeräten) anwenden</li> </ul>

## Funktionen

- Beschreiben von Abhängigkeiten, die durch reelle Funktionen in einer Variablen erfassbar sind (mittels Termen, Tabellen und Graphen), Reflektieren über den Modellcharakter von Funktionen
- Beschreiben und Untersuchen von linearen und einfachen nicht-linearen Funktionen (zB  $a/x$ ,  $a/x^2$ ,  $ax^2+bx+c$ , abschnittsweise definierte Funktionen)
- Untersuchen von Formeln im Hinblick auf funktionale Aspekte, Beschreiben von direkten und indirekten Proportionalitäten mit Hilfe von Funktionen
- Arbeiten mit Funktionen in anwendungsorientierten Bereichen

## Trigonometrie

- Definieren von  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$  für  $0^\circ - 360^\circ$
- Durchführen von Berechnungen an rechtwinkligen und allgemeinen Dreiecken, an Figuren und Körpern (auch mittels Sinus- und Kosinussatz)
- Kennenlernen von Polarkoordinaten

## Vektoren und analytische Geometrie der Ebene

- Addieren von Vektoren und Multiplizieren von Vektoren mit reellen Zahlen, geometrisches Veranschaulichen dieser Rechenoperationen
- Ermitteln von Einheitsvektoren und Normalvektoren
- Arbeiten mit dem skalaren Produkt, Ermitteln des Winkels zweier Vektoren
- Beschreiben von Geraden durch Parameterdarstellungen und durch Gleichungen, Schneiden von Geraden
- Lösen von geometrischen Aufgaben, gegebenenfalls unter Einbeziehung der Elementargeometrie

- im Rahmen der **Wärmelehre** Zustände und Zustandsänderungen der Materie mit Hilfe des Teilchenkonzepts erklären können, den nachhaltigen Umgang mit Energie beherrschen und bei angestrebter größerer Erklärungstiefe die Bedeutung der thermodynamischen Hauptsätze verstehen

- mit Hilfe der **Bewegungslehre** (Relativität von Ruhe und Bewegung, Bewegungsänderung: Energieumsatz und Kräfte, geradlinige und kreisförmige Bewegung, Impuls und Drehimpuls, Modell der eindimensionalen harmonischen Schwingung)

Verständnis für Vorgänge, beispielsweise im Verkehrsgeschehen oder bei den Planetenbewegungen, entwickeln - an Hand von Grundeigenschaften mechanischer Wellen

Verständnis für Vorgänge, beispielsweise aus Akustik oder Seismik, entwickeln und als Mittel für Energie- und Informationsübertragung verstehen

## 6.2 Größenordnungen – Zehnerpotenzen

### 6.2.1 Stundenplanung Mathematik: Zehnerpotenzschreibweise mit ganzzahligen Exponenten

#### Ziele:

- Große bzw. kleine Zahlen mit Hilfe der Exponentenschreibweise darstellen
- Größenvergleiche machen können
- Mit Zehnerpotenzen rechnen können
- Darstellung von großen bzw. kleinen Zahlen mit dem Taschenrechner

Phase	Inhaltlicher Verlauf	Kommentar
1.	Exponentenschreibweise besprechen Begriffe Gleitkommadarstellung, scientific notation	Einstieg
2.	Darstellen von großen Zahlen mit Exponentenschreibweise Zehnerpotenzen mit positiven Exponenten Z.B. Abstand Erde-Sonne 149 000 000 km = $1,49 \cdot 10^8$ km	Beispiele Übungen Einzelarbeit
3.	Darstellen von kleinen Zahlen mit Exponentenschreibweise Zehnerpotenzen mit negativen Exponenten Z.B. Durchmesser eines Wasserstoffatoms $0,000\ 000\ 012$ cm = $1,2 \cdot 10^{-8}$ cm	Beispiele Übungen Einzelarbeit
4.	Exponentenschreibweise am Taschenrechner Berechnen von Potenzen mit dem Taschenrechner	Partnerarbeit

### 6.2.2 Physik-Unterricht: Ablaufs-Skizze

#### 1. Übersicht über den RAUM-Begriff in seiner historischen Entwicklung

Raum als Ort von Objekten (Aristoteles)

KOSMOS als geordneter Raum *Beispiel: Das mittelalterliche Weltbild*

Cartesischer Raum (drei Dimensionen) – das Koordinatensystem. *Beispiel: Flatland: Wie sehen 2 – 3 – 4dimensionale Lebewesen aus?*

Newtons absoluter Raum als ewig, homogen – ein leerer Behälter, gedacht als Sinnesorgan Gottes

Einsteins Raum-Zeit, gekrümmte Räume; relativer Raum, hängt ab von Bewegung und Materie

#### 2. Eine Reise durchs Universum

Ist der Weltraum unendlich? Wie sieht er „von außen gesehen“ aus? Wie groß ist das Weltall ...

CONTACT (Kinofilm) – Beginn: Eine virtuelle Reise von der Erde bis an die Grenzen des Alls (ca. 5 Minuten): Was war alles zu sehen? Welche Objekte kamen vor? Welche Entfernungen wurden zurückgelegt? Was waren physikalische Fehler in diesem Ausschnitt?

Reise durch den Kosmos, Klären von Größenordnungen und Objekten: Stern, Planet, Planetensystem, Galaxie

Zehnerpotenzen und Abkürzungen (k – T)

Folie/Arbeitsblatt (aus Astronomie+Raumfahrt im Unterricht 4/2002): Entfernungen jeweils x 100, beginnend mit 1 km.

Rechne die Längen in m um. Denken wir uns ein Modell im Maßstab  $1:10^{12}$ : Die Sonne ist 1 mm groß – Ergänzung der Folie.

Lichtzeiten im Sonnensystem

### Beispiel

Die folgende Tabelle zeigt die mittleren Abstände in unserem Planetensystem in Vielfachen des Abstandes Sonne-Erde ("Astronomische Einheit"), weiters den Abstand zu einem der nächsten Sterne

<b>Merkur</b>	0,4	Das Licht benötigt von der Sonne zur Erde ca. 8 Minuten. Stelle Dir vor, Du könntest mit halber Lichtgeschwindigkeit reisen – wie lange würdest Du jeweils brauchen?
<b>Venus</b>	0,7	
<b>Erde</b>	1,0	
<b>Mars</b>	1,5	Überlege Dir einen Maßstab, in dem das ganze Sonnensystem in den Schulhof passt. Wo ist dann der nächste Stern?
<b>Jupiter</b>	5,2	
<b>Saturn</b>	9,5	Wie groß wären in diesem Modell die Sonne (ca. 0,01 AE) und die Erde (ca. 0,0001 AE)?
<b>Uranus</b>	19,2	
<b>Neptun</b>	30,1	Wie groß wäre die Lichtgeschwindigkeit in diesem Modell?
<b>Pluto</b>	39,4	
<b><math>\alpha</math> Centauri</b>	270.000	

## 6.3 Funktionen - Bewegungsdiagramme

### 6.3.1 Stundenplanung Mathematik: Funktionen

#### Ziele:

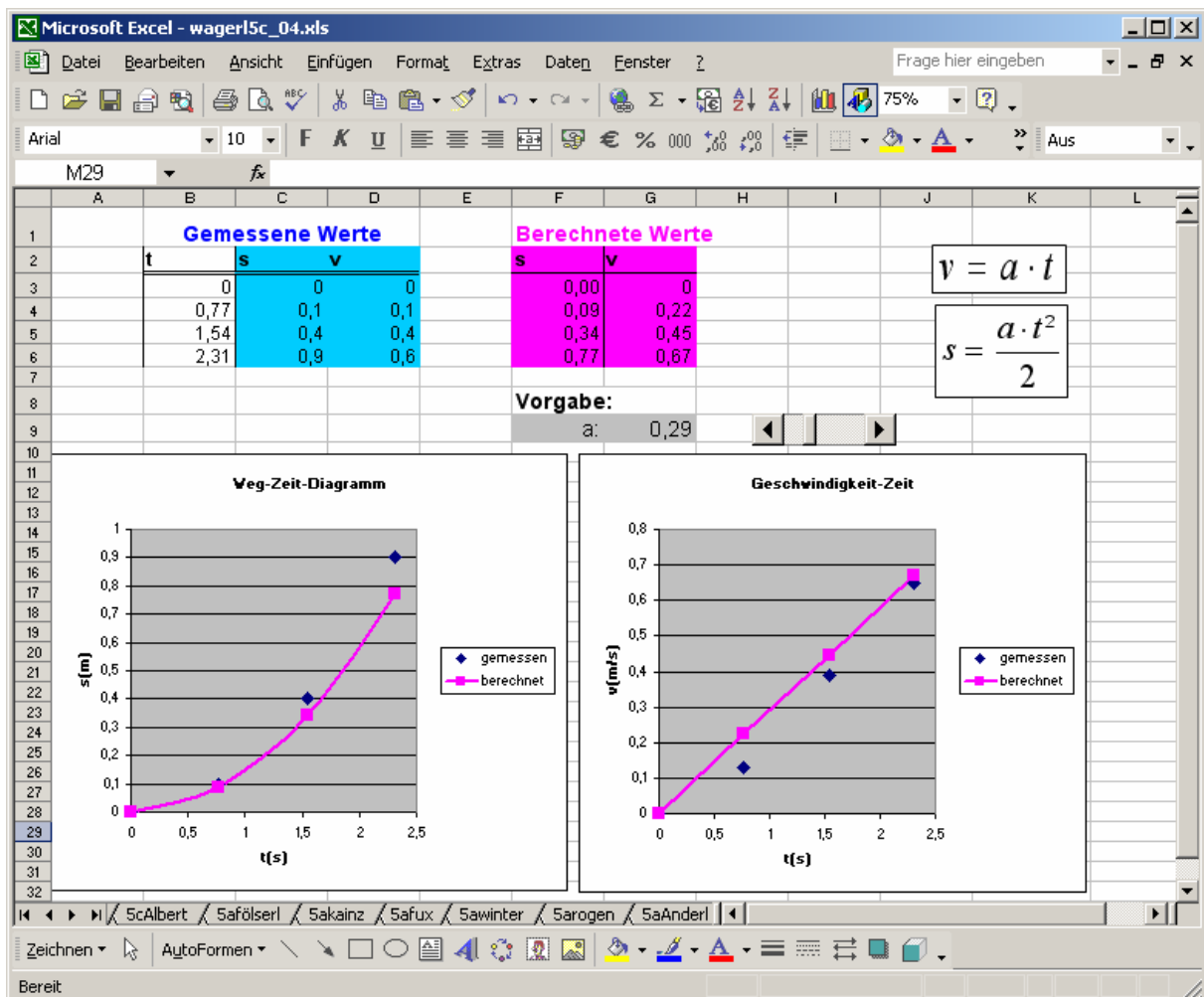
- Beispielen aus dem Alltag Funktionsgraphen zuordnen können
- Abhängigkeit einer Größe von einer anderen erkennen
- Sachverhalte grafisch darstellen können
- Funktionale Zusammenhänge durch passende Gleichungen ausdrücken können

Phase	Inhaltlicher Verlauf	Kommentar
1.	<p>Kopiervorlage aus <i>mathematik lehren Heft Nr. 103</i></p> <p>In den 6 Aufgaben des Arbeitsblattes ist jeweils ein Bild mit einer bestimmten Situation (zum Großteil mit Alltagsbezug) dargestellt. Daneben befinden sich drei Funktionsgraphen.</p> <p>Die SchülerInnen sollen den Graphen herausfinden, der die jeweilige Situation beschreibt!</p> <p>Z.B. „Das Auto fährt eine Kurve und bewegt sich mit gleich bleibender Geschwindigkeit. Der Funktionswert <math>s(t)</math> gibt den zurückgelegten Weg zum Zeitpunkt <math>t</math> an.“</p>	<p>Einstieg</p> <p>Motivation</p> <p>Einzelarbeit</p>
2.	<p>Die SchülerInnen sollen zu zweit drei Situationen aus dem Alltag wählen und versuchen diese Sachverhalte mit Hilfe von Funktionen zu beschreiben.</p>	<p>Partnerarbeit</p>
3.	<p>Modellieren von Sachverhalten</p> <p>Beispiel „Geschwindigkeit und Länge des Bremsweges“ (Lehrbuch Seite 59)</p> <p>Veranschaulichen im Koordinatensystem</p> <p>Funktionalen Zusammenhang als Gleichung ausdrücken</p> <p>Zwei Ausgangsgeschwindigkeiten wählen und den Bremsweg berechnen.</p>	<p>Einzelarbeit</p> <p>Diskussion</p>
4.	<p>Definition von den Begriffen Funktion oder Abbildung, Definitionsbereich, Wertebereich.</p> <p>Möglichkeiten eine Funktion anzugeben:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Funktionsgleichung</li> <li>• Funktionsterm</li> <li>• Zuordnungsvorschrift</li> </ul>	<p>Input</p>

## 6.3.2 Beispiele aus dem Physikunterricht

### Auswertung von Messdaten mit EXCEL

In Zusammenarbeit mit Informatik wurden reale Messdaten aus Rollversuchen auf der geneigten Fahrbahn (siehe auch 2.2.2., Seite 12) in ein Excel-sheet eingegeben. Die Geschwindigkeit wurde für jedes Intervall berechnet (linke Tabelle). Dem gegenübergestellt wurden Werte, die aus einer vorgegebenen (regelbaren) Beschleunigung berechnet wurden.



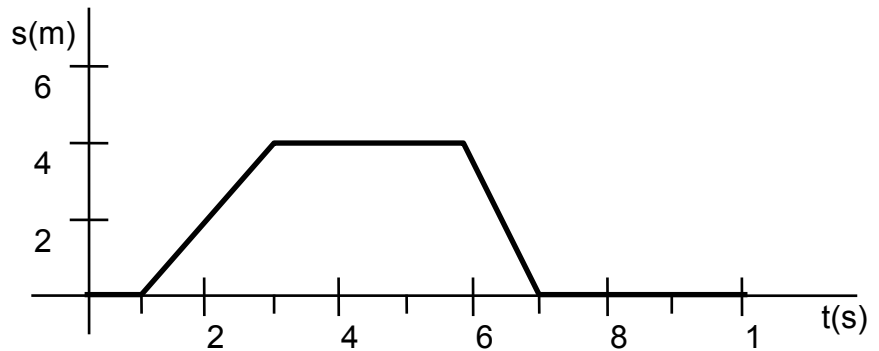
Damit lassen sich – als Simulation – tatsächlich gemessene mit berechneten Werten vergleichen und die Beschleunigung grafisch ermitteln. Die Messwerte werden nur als Punkte eingetragen, wogegen die berechnete Kurve durchgezogen wird.

Die gemessenen Geschwindigkeits-Werte liegen unter den berechneten, da sie jeweils auf das Ende eines Intervalls aufgetragen sind (gestoppte Zeit), statt auf die Mitte.

## Aufgabenblatt (Übung für die erste Lernzielkontrolle)

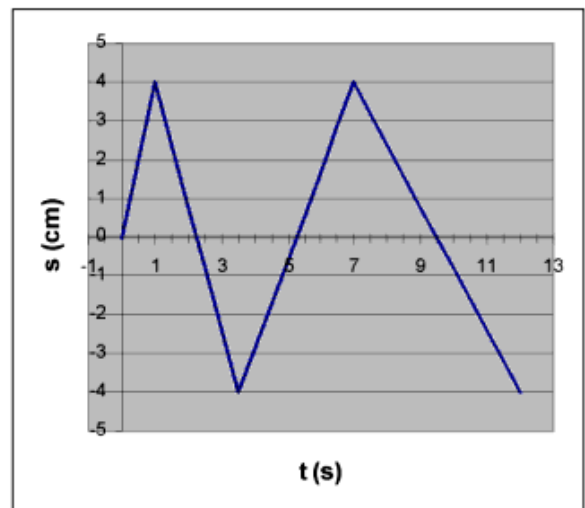
1. Beschreibe die Bewegung des Fahrrads, die im folgenden Diagramm dargestellt ist!

Wie sieht das v-t-Diagramm aus?



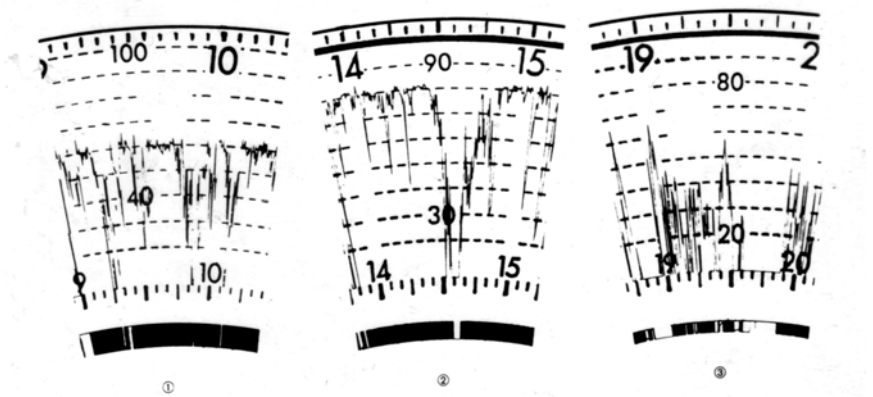
2. Gegeben ist das Weg-Zeit-Diagramm der Bewegung einer Stahlkugel.

- Beschreibe die Bewegung der Kugel!
- Was könnte die Ursache dieser Bewegung sein?
- Wie schnell ist die Kugel?
- Wie sieht das v-t-Diagramm aus?



3. Hier siehst du 3 Ausschnitte aus einem Fahrtenschreiber (LKW oder Bus).

- Welcher Diagrammtyp ist hier zu sehen? Was könnten die Zahlen bedeuten?
- Um welche Situation könnte es sich jeweils handeln (Stehen, Autobahn, Stadtverkehr, Freilandstraße...)?



## 6.4 Trigonometrie - Kräftezerlegung

### 6.4.1 Stundenplanung Mathematik: Trigonometrie

#### Ziele:

- Begriffe und Sätze in Zusammenhang mit Dreiecken aus der Unterstufe wiederholen
- Verfahren kennenlernen, mit deren Hilfe man Winkel berechnen kann
- Sin, cos, tan als Längenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck definieren können

Phase	Inhaltlicher Verlauf	Kommentar
1.	„Trigonometrie – was heißt das?“ trigonon (griech.)....Dreieck gonia (griech.).....Winkel metron (griech.).....Maß  „Welche Begriffe und Sätze im Zusammenhang mit Dreiecken kennst du bereits aus der Unterstufe?“ Sammeln und ordnen der Ergebnisse.	Einstieg Motivation Wiederholung
2.	Beispiel: Standseilbahn ( <i>Lehrbuch (1) Seite 127</i> ) Versuche mit Hilfe der bisherigen Kenntnisse zu lösen! Wo gibt es Probleme beim Lösen? ->Größe von Winkeln nur zeichnerisch zu ermitteln!	Einzelarbeit
3.	Verfahren zur Ermittlung von Winkelgrößen im rechtwinkligen Dreieck. Gleiche Längenverhältnisse bei rechtwinkligen Dreiecken ->Ähnliche Dreiecke ->Strahlensatz Abhängigkeit der Längenverhältnisse von der Winkelgröße	Schüler – Lehrer – Gespräch Input
4.	Definition von Sinus, Cosinus und Tangens eines spitzen Winkels als Längenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck	Input
5.	Beispiel: Schleppliftrasse mit 75% Steigung. Berechne den Steigungswinkel! Steigung als Verhältnis von Höhengewinn (Höhenverlust) zu Horizontalentfernung Steigung einer Geraden	Einzelarbeit Wiederholung lineare Funktion - Steigung

## 6.4.2 Physik: Beispiel und Versuchsprotokoll

Der Startschuss von **St. Moritz**: „Im freien Fall ...“

# 187 Stufen rauf, im freien Fall hinunter

KLEINE ZEITUNG  
5. Feb. 2003

Die Herren-Abfahrt lebt von ihrem 150 Meter langen Startschuss. Wo Bagger, Pistenraupen & Helfer nur angeseilt arbeiten können. Doch gestern gab es kein Training. Und heute gibt es keine ÖSV-Qualifikation.

AUGUST KUHN, ST. MORITZ

**W**illy Bassin ist Kanadier mit Schweizer Wurzeln. In seiner neuen Heimat baut er Golfplätze, bei der Herren-WM-Abfahrt auf der „Corviglia“ ist Willy der Mann, der mit seinem „Go“ die Abfahrer im freien Fall in die Tiefe schickt. 150 Meter mit einem Gefälle von 100 Prozent, in sechs Sekunden von 0 auf 140 km/h – bis hin zu Willys Gate, dem ersten Tor der WM-Abfahrt. „Eine Mutprobe“, sagt Robert Trenkwalder, Trainer der ÖSV-Abfahrer.

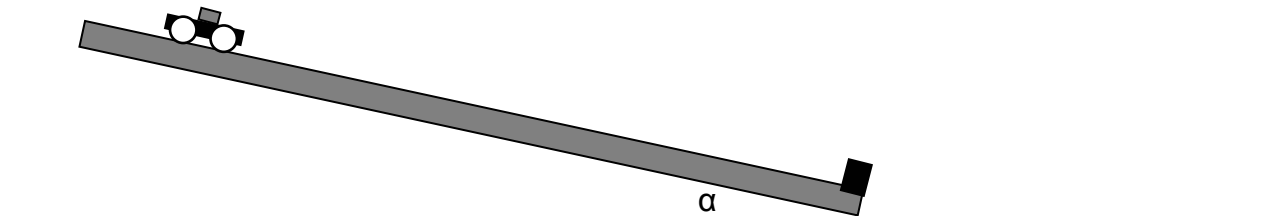
- a) Wie groß ist der „durchfallene“ Höhenunterschied?
- b) Wie groß ist die Beschleunigung?
- c) Wie schnell wäre der Läufer, wenn er die bewältigte Höhe frei fallen würde?

## Versuchsprotokoll: Rollende Ph-Mega-Cars Vol. 3

### Wie groß ist die beschleunigende Kraft?

Bestimme die beschleunigende Kraft auf ein Wagerl bei gegebener Steigung auf 2 Arten! Vergleiche die Messungen mit einer theoretischen Rechnung (Mathematik-Unterricht)

**Material:** Fahrbahn, Wagerl, Gewichte, Federwaage, Stoppuhr



Neigungswinkel  $\alpha$ : .....

Masse  $m$  des Cars: .....

Gewicht  $F_G$ : .....

#### a) Direkte Messung der Kraftkomponente mit der Federwaage

#### b) Indirekt: Wagerl rollt beschleunigt, Messung von $s$ , $t$

$s$ : (gefahrne Strecke)  
 $t$ : (benötigte Zeit)

$a$ : .....

$F$ : .....

$$s = a/2 \cdot t^2$$

$$F = m \cdot a$$

#### c) Vergleiche die beiden Messergebnisse! Diskutiere die Messfehler.

#### d) Trigonometrische Berechnung aus dem Steigungswinkel – Vergleich mit den Messungen

## 6.5 Vektoren und Impuls

### 6.5.1 Stundenplanung Mathematik: Analytische Geometrie der Ebene - Vektoren

**Ziele:**

- Begriffe Punkt, Pfeil, Ortspfeil, Vektor, Ortsvektor unterscheiden und definieren können
- Punkte und Vektoren berechnen können
- Mit Hilfe von Vektoren Eigenschaften von Vierecken überprüfen können!

Phase	Inhaltlicher Verlauf	Kommentar
1.	Ebenes kartesisches Koordinatensystem	Einstieg Wiederholung und Vertiefung
2.	Pfeile als orientierte Strecken in ein Koordinatensystem zeichnen Schreibweise Gemeinsamkeiten erkennen	Input Einzelarbeit
3.	Information: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Pfeil als Ortspfeil (Pfeilkoordinaten-Punktkoordinaten)</li> <li>• Koordinaten allgemeiner Pfeile</li> <li>• Vektoren - Ortsvektor</li> </ul>	Input
4.	Definition von Vektoren in der Ebene	Input
5.	Beispiele: <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\vec{p} = \overrightarrow{AB}</math> mit Anfangspunkt A. Bestimme B</li> <li>• Punkte A und B gegeben. Bestimme <math>\overrightarrow{AB}</math>!</li> <li>• Überprüfe, ob das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist</li> </ul>	Beispiele Einzelarbeit

## 6.5.2 Stundenplanung Physik: Impuls als vektorielle Größe

### Ziele:

- Skalare und Vektorielle Größen unterscheiden
- Impuls alltagssprachlich erklären und physikalisch definieren können
- einfache Stoßvorgänge mittels Impulserhaltung (vektoriell) beschreiben können
- Durchführung und grafische Auswertung von Stoßversuchen mit Münzen

Phase	Inhaltlicher Verlauf	Kommentar
1.	Heute geht es um eine Übersicht über physikalische Größen, die wir schon gelernt haben – aus neuer Sicht. Wir schaffen Ordnung. Und ihr lernt eine neue Größe kennen, ein der wichtigsten in der Physik: Impuls	Einstieg Übersicht Motivation
2.	<b>Rückgabe</b> der Versuchsprotokolle ? Beschreibung des Versuchs: Messung der Haftreibung Kraft in Komponenten zerlegen: ist mathematisch eine <b>Vektoraddition</b>	Wiederholung  Buch S. 35
3.	<b>Kraft</b> hat eine wesentliche zusätzliche Eigenschaft gegenüber z.B. Temperatur: Sie hat immer eine Richtung! Größen, bei denen die Richtung eine Rolle spielt: <b>vektorielle Größen</b> . Z.B. Kraft, Geschwindigkeit. Ph. Schreibweise: Pfeil oberhalb Richtung egal: skalare Größen. Z.B. Temperatur, Zeit. Aufgabe: kleine Tabelle mit vektoriellen/skalaren Größen	Input: Vektorielle und Skalare Größen  Aufgabenstellung
4.	Eintragen von vektoriellen und skalaren Größen in Tabelle	Einzel/Gruppenarbeit, mit Buch Mündliche Zusammenfassung
5.	Ihr werdet eine der wichtigsten physikalischen Größen kennen lernen. Gilt von Elementarteilchen bis zur Raumfahrt: <b>IMPULS</b> . Weiters wichtig: Bleibt in der Summe bei Wechselwirkungsvorgängen erhalten  Impulsbegriff. Er beschreibt die Menge, Wucht einer Bewegung. Enthält Geschwindigkeit (Richtung) und Masse $p=m \cdot v$ , Einheit Bei Wechselwirkungen: $p_{\text{vorher}}=p_{\text{nachher}}$ ! (Impulserhaltung. Vektoriell!)	Input:  Einführung von Impuls als Beschreibung der Menge der Bewegung Mächtigkeit des Begriffs  Vereinfachung: Geschlossene Systeme weggelassen.
6.	Aufgabenstellung für Schülerversuch: 2 gleiche Münzen, diverse Stöße. Ins Heft zeichnen (Positionen) Zeichnen der Geschwindigkeitspfeile: Maß für Geschwindigkeit ist Wurzel aus Weg (glm. Verzögerte Bewegung). Vektoren in mathematischer Darstellung: Koordinatensystem.  Vektoraddition führt zu Ausgangsimpuls	2 gleiche Münzen. a) zentraler Stoß b) mit Winkel (Lehrbuch S. 65)  Durchführung des Schülerversuchs in Gruppen Ergebnisse zusammenfassen (Protokoll)

Münze 1 wird auf Münze 2 geschossen

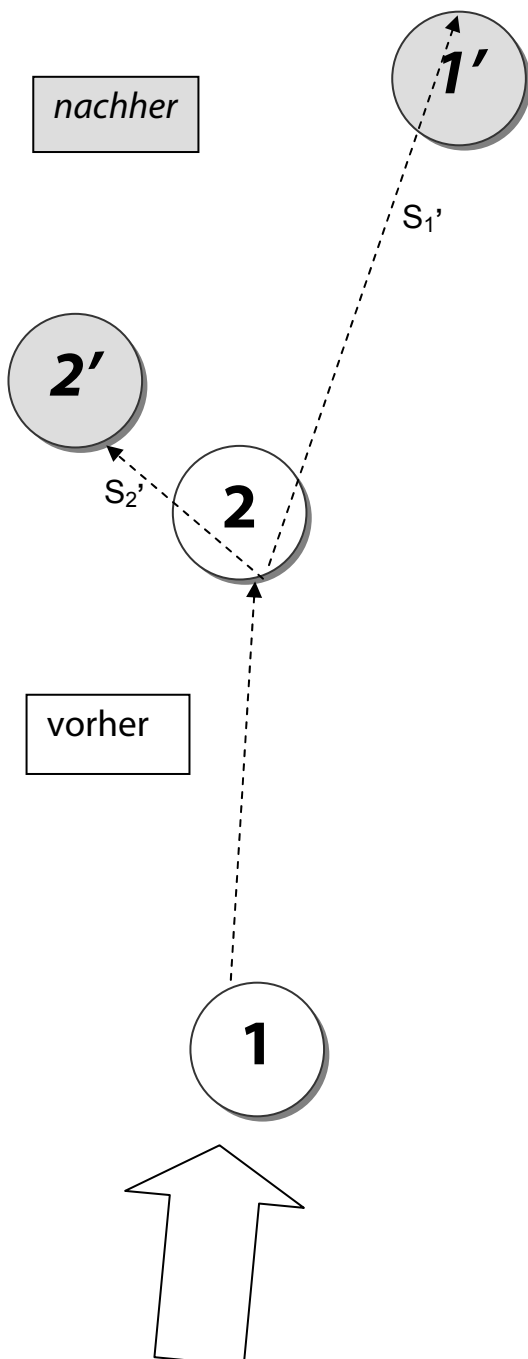
Die Positionen der Münzen vorher und nachher werden auf dem Blatt markiert

Die zurückgelegten Wegstrecken (vom geschätzten Stoßpunkt) werden gemessen

Die Wurzel aus der zurückgelegten Strecke wird jeweils als Maß für die Geschwindigkeit betrachtet:

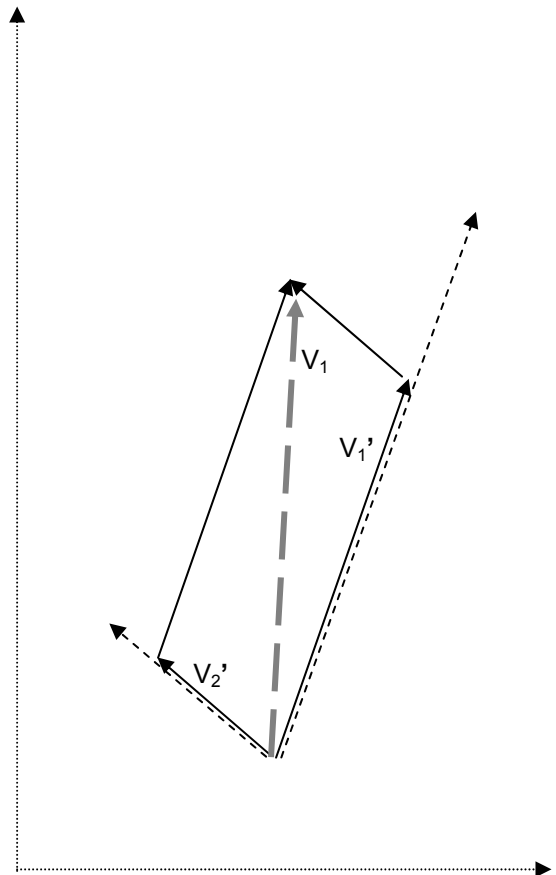
$$v \sim \sqrt{s}$$

(Anm: Das Gleiten wird als gleichmäßig verzögert angenommen ->  $s=v^2/2a$ )



In der Vektoraddition ergibt sich die Anfangsgeschwindigkeit.

Im Idealfall ergibt sich zwischen den beiden Geschwindigkeiten ein rechter Winkel (Energieerhaltung)



**Auswertung im Mathematik-Unterricht**

Über ein Koordinatensystem werden die Vektoren in mathematische Schreibweise gebracht.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ usw.}$$

Multiplikation mit der Masse der Münze ergibt die Impuls-Pfeile.

## 6.6 Lernzielkontrollen aus Physik

### 5.a - Lernzielkontrolle 1 (Gruppe A)

1. Wie viele mal ist ein mm mehr als 100 nm?

2. Bei einem Experiment mit rollenden Ph-Mega-Cars wurden die untenstehenden Strecken und Zeiten gemessen. Zeige, wie man möglichst genau die jeweilige Geschwindigkeit des OKFZs berechnen kann! (Fülle die Spalte aus und erkläre die Rechnung)

s(cm)	t(s)	
0	0	
20	1	
40	1,5	
60	1,7	

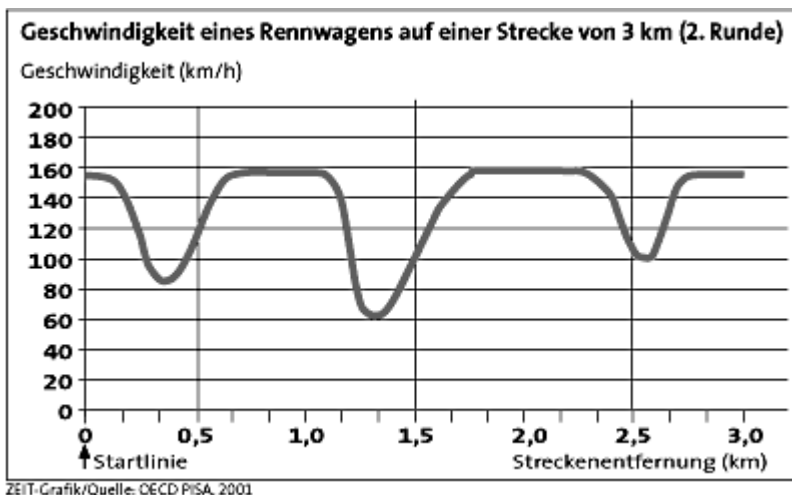
(4)

### 3. Geschwindigkeit eines Rennwagens

Der neben stehende Graph zeigt, wie die Geschwindigkeit eines Rennwagens während seiner zweiten Runde auf einer drei Kilometer langen ebenen Rennstrecke variiert.

**Frage A:** Wie groß ist die ungefähre Entfernung von der Startlinie bis zum Beginn des längsten geradlinigen Abschnitts der Rennstrecke?

- A 0,5 km
- B 1,5 km
- C 2,3 km
- D 2,6 km



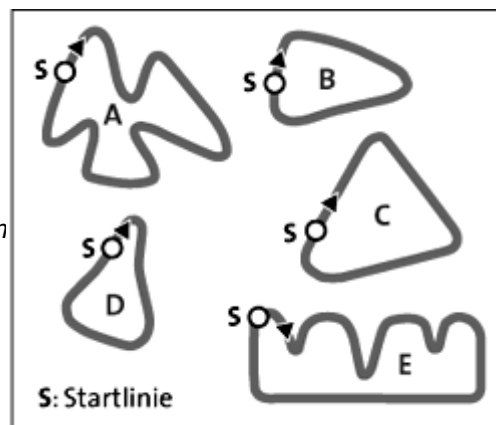
**Frage B:** Wo wurde während der zweiten Runde die geringste Geschwindigkeit gemessen?

- A an der Startlinie
- B bei etwa 0,8 km
- C bei etwa 1,3 km
- D nach der halben Runde

**Frage C:** Was kannst du über die Geschwindigkeit des Wagens zwischen den Markierungen 2,6 km und 2,8 km sagen?

- A Die Geschwindigkeit des Wagens bleibt konstant.
- B Die Geschwindigkeit des Wagens nimmt zu.
- D Die Geschwindigkeit des Wagens nimmt ab.
- E Die Geschwindigkeit des Wagens kann anhand des Graphen nicht bestimmt werden.

**Frage D:** Hier siehst du Abbildungen von fünf Rennstrecken: Auf welcher dieser Rennstrecken fuhr der Wagen, sodass der am Anfang gezeigte Geschwindigkeitsgraph entstand?



ZEIT-Grafik/Quelle: OECD PISA, 2001

## Lernzielkontrolle 2 (Gruppe A)

1.



a) Wie erklärst du dem Häuptling diese „blöde Frage“?

b) Wenn rotauge als Super-Indianer gaaaanz hooch springen könnte – wo würde er landen, und warum?

2. Beschreibe die Raumflugbewegung der Sonde Cassini von der Erde bis zum Saturn anhand einer Skizze! In welchem Jahr erfolgte der Start, in welchen Jahren gab es Vorbeiflugmanöver (an welchen Planeten)?

Woher bekommt die Sonde beim SwingBy die zusätzliche Energie?)

### 3. Wurfbewegung

Konstruiere eine mögliche Flugbahn eines geworfenen Basketballs beim Freiwurf (Abstand Korb-Werfer: 5 m; Korzhöhe vom Boden: 3 m). (vom Luftwiderstand wird abgesehen).

(Rückseite)

### 4. Zusatzaufgabe

Wie viele mal ist ein mm mehr als 100 nm?

Wie würdest du die Schwierigkeit der Beispiele beurteilen? (1 - sehr leicht, 6 – sehr schwierig)													Wie interessant findest du die Aufgabenstellung? (1 – uninteressant, 6 – sehr interessant)														
1	1		2		3		4		5		6		1	1		2		3		4		5		6			
2		1		2		3		4		5		6	2		1		2		3		4		5		6		
3			1		2		3		4		5		6	3			1		2		3		4		5		6

## 6.7 Schularbeitenbeispiele aus Mathematik mit physikalischem Bezug

In Mathematik-Schularbeiten der 5.a-Klasse wurden einige Aufgaben gegeben, die physikalische Bezüge aufweisen bzw. mit dem Physik-Unterricht koordiniert waren. Im folgenden ist jeweils das Beispiel der Gruppe A abgedruckt.

Der Fixstern Sirius ist 8,6 Lichtjahre (1 Lichtjahr  $\approx$  9,461 Billionen km) von der Erde entfernt. Gib die Entfernung in km an und schreibe das Ergebnis in Gleitkommadarstellung!

Der Durchmesser der Sonne beträgt 1 392 530 km, der Durchmesser des Mondes 3476 km. Um wie viele Größenordnungen unterscheiden sich die beiden Größen? Gib beide Größen in Gleitkommadarstellung an!

Wahr oder falsch?

Das Doppelte von  $10^7$  ist  $10^{14}$ .

Die Hälfte von  $10^{-4}$  ist  $10^{-2}$ .

Vom Ort A geht um 6:00 Uhr ein Güterzug und 1 Stunde später ein Personenzug nach dem Ort B ab. Der Personenzug holt den Güterzug um 8:30 Uhr ein und kommt um 11:30 Uhr im Ort B an; zu dieser Zeit ist der Güterzug noch 40 km von B entfernt. Berechne (1) die Entfernung von A und B, (2) die mittlere Geschwindigkeit des Güterzuges in km/h, (3) die mittlere Geschwindigkeit des Personenzuges in km/h und (4) die Ankunftszeit des Güterzuges im Ort B.

Rampen für Rollstuhlfahrer sollten nicht steiler als 6 % sein. Wie lang muss die Schrägseite der Rampe mindestens sein, wenn sie einen Höhenunterschied von 40 cm überwinden helfen soll? (Skizze erforderlich!)

Von der Spitze eines 32 m hohen Mastes ist ein Seil zu einem Punkt des (waagrechten) Bodens gespannt, der 15 m vom Fuß des Mastes entfernt ist. Welchen Winkel schließt das Seil mit dem Boden ein und wie lang ist das Seil (wenn man annimmt, dass es straff gespannt ist)? (Skizze erforderlich!)

Welchen Höhenunterschied hat man überwunden, wenn man auf einer unter 14 % ansteigenden Strasse 3 km zurücklegt?

Von einem Beobachtungsort in einer Seehöhe von 457 m misst man zum Fußpunkt eines Sendemastes, der sich auf einem Berggipfel in einer Seehöhe von 989 m befindet, einen Höhenwinkel von  $12,59^\circ$ , zur Spitze des Sendemastes einen Höhenwinkel von  $13,21^\circ$ . Wie hoch ist der Sendemast? (Skizze mit entsprechender Bezeichnung deiner verwendeten Größen ist unbedingt erforderlich!)

Von einem 9,45 m hoch gelegenen Fenster eines Hauses sieht man die Spitze eines Turmes unter dem Höhenwinkel von  $19,2^\circ$ , den Fuß des Turmes unter dem Tiefenwinkel  $4,1^\circ$ . Wie hoch ist der Turm und wie weit ist der Turm vom Haus entfernt, wenn er mit diesem auf der gleichen waagrechten Ebene steht? (Skizze erforderlich!)

## 6.8 Mathematische und physikalische Aufgaben – „gute“ und „schlechte“

### 6.8.1 Lehrbuch Mathematik

*Deine Meinung ist gefragt!*

*Schau dir die folgenden Aufgaben deines Mathematik-Buchs an und suche jene (jeweils 2) heraus, die dir am besten (bzw. am wenigsten) gefallen*

Aufgabe Seite/Nr.	
12/ 1	117/ 20
15/ 10, 12, 13	122/ 1
16/ 14, 18	123/ 1
17/ 20	137/ 1
53/ 39,40	139/ 10
59/ 1	162/ 5
67/ 13	169/ 11
75/ 18	170/ 18,19
76/ 1	187/ 13, 14
79/ 4, 5	188/ 20,22
88/ 10	

*Die 2 besten Aufgaben:*

*Die 2 schlechtesten Aufgaben:*

### **Begründung**

---

Warum ist eine Aufgabe „gut“? Was gefällt dir daran?

Warum ist eine Aufgabe schlecht? Wie könnte man sie verbessern?

## 6.8.2 Lehrbuch Physik

*Deine Meinung ist gefragt!*

*Schau dir die folgenden Aufgaben deines Physik-Buchs an und suche jene (jeweils 2) heraus, die dir am besten (bzw. am wenigsten) gefallen*

Aufgabe Seite/Nr.	
6/ Bsp. Zehnerpotenzen	50/ 6
23/ 5	56/ 1
32/ 2, 3	57/ 2, 3
33/ 1	59/ 2
36/ 1, Bsp. „Wer ist schneller?“; Radfahrt	60/ 2, 3, 5
37/ Bsp. „Wer beschleunigt besser?“	61/ 2
38/ Bsp. Autorennen	63/ 1, 3
39/ 2, 3	64/ 2, 3
40/ Bsp. Autounfall, 3, 6, 7	68/ 2, 3, 4, 5
42/ 1	69/ 2
43/ 2, 3	72/ 3
44/ 1	73/ 7
48/ 5	75/ Bsp. Zusammenstoß
49/ 5, 6	77/ 2, 3
	78/ 2, 3, 4
	79/ 2

*Die 2 besten Aufgaben:*

*Die 2 schlechtesten Aufgaben:*

### **Begründung**

---

Warum ist eine Aufgabe „gut“? Was gefällt dir daran?

Warum ist eine Aufgabe schlecht? Wie könnte man sie verbessern?

## 6.9 Gut bewertete Aufgaben der Lehrbücher

### 6.9.1 Lehrbuch Physik (2)

#### S. 40: Beispiel Autounfall

Ein Auto kracht mit 50 km/h in eine massive Hausmauer. Es kommt zum Stillstand, nachdem seine Karosserie um 40 cm gestaucht wurde.

Wie groß ist die durchschnittliche Bremsverzögerung und wie lange dauert es, bis das Auto zum Stillstand kommt, wenn eine konstante Bremsbeschleunigung angenommen wird?

#### S. 6: Beispiel Zehnerpotenzen

Überlege, von welcher Größenordnung Dinge aus deiner Umgebung sind! Welche Vorsilben verwendest du, um Größen aus dem Alltag, aus deiner Umgebung anzugeben?

### 6.9.2 Lehrbuch Mathematik (1)

#### S. 137 Aufgabe 1

a) Von einem 75m entfernten Turm wird mit Hilfe eines Theodoliten die Größe des Höhenwinkels mit dem Ergebnis  $\alpha=38^\circ$  bestimmt.

Wie hoch ist der Turm? (Vernachlässige die Höhe des Theodoliten)

b) Wie groß ist der Höhenwinkel in einer Entfernung von 120 m?

#### S. 123 Aufgabe 1

Ein Fußgänger beginnt zum Zeitpunkt  $t=0$  eine Wanderung von Ort A in Richtung B mit einer Geschwindigkeit von 5 km/h. 2 Stunden später fährt ein Radfahrer mit der Geschwindigkeit von 15 km/h von A in Richtung B.

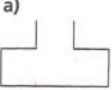
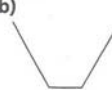
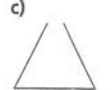


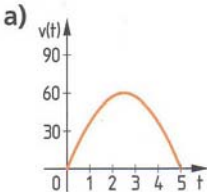
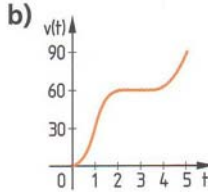
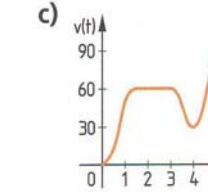
a) Zeichne den Graphen beider Weg-Zeit-Funktionen

b) Bestimme anhand deiner Zeichnung, wann und wo der Radfahrer den Fußgänger einholt.

c) Wie weit von A entfernt kann der Radfahrer sagen, dass er in 10 Minuten den Fußgänger eingeholt haben wird?

## 6.10 Wie interessant sind Bewegungsaufgaben?

### 6.10.1 Beispiel für ein Aufgabenblatt

1.	<p>Ein Brunnen ist 60 m tief. Nach welcher Zeit hört man den Aufprall eines losgelassenen Steines (Schallgeschwindigkeit <math>v_s = 340 \text{ m/s}</math>)? Wie groß ist der Fehler, wenn man die Laufzeit des Schalls vernachlässigt?</p>
2.	<p>Im folgenden ist der Querschnitt eines Gefäßes dargestellt, das die Form eines Rotationskörpers hat. Skizziere den Graphen der Füllfunktion! (Höhe in Abhängigkeit von der Zeit)</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">a) </div> <div style="text-align: center;">b) </div> <div style="text-align: center;">c) </div> <div style="text-align: center;">d) </div> <div style="text-align: center;">e) </div> </div>
3.	<p>Die Lichtgeschwindigkeit beträgt <math>3 \cdot 10^8 \text{ m/s}</math>, die Schallgeschwindigkeit in Luft <math>340 \text{ m/s}</math>. Bei einem Gewitter hörst du den Donner 3 Sekunden, nachdem du den Blitz gesehen hast. Wie weit war die Blitzentladung entfernt?</p>
4.	<p>Zwei Trampolinspringer springen abwechselnd je <math>h = 4 \text{ m}</math> hoch in die Luft, und zwar springt der eine jedes mal dann vom Trampolin weg, wenn der andere am höchsten Punkt angekommen ist und umgekehrt. Unglücklicherweise kam es einmal vor, dass beide in der Luft zusammenstießen. Dies passierte</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. auf genau halber Höhe, d.h. bei genau <math>2 \text{ m}</math> Höhe.</li> <li>2. über halber Höhe, (über <math>2 \text{ m}</math> Höhe).</li> <li>3. unter halber Höhe (unter <math>2 \text{ m}</math> Höhe).</li> </ol> <p>Begründe deine Antwort (vielleicht mittels Höhe – Zeit – Diagramm)!</p>
5.	<p>Auf einem Streckenabschnitt von <math>300 \text{ m}</math> verdoppelt ein Fahrzeug bei gleichmäßiger Beschleunigung innerhalb von <math>20 \text{ Sekunden}</math> seine Geschwindigkeit. Wie groß sind Anfangs- und Endgeschwindigkeit?</p>
6.	<p>In dem folgenden Graphen ist die Geschwindigkeit <math>v(t)</math> eines Autos zum Zeitpunkt <math>t</math> dargestellt (<math>t</math> in Minuten, <math>v(t)</math> in <math>\text{km/h}</math>). Beschreibe die Fahrt des Autos.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>a)</p>  </div> <div style="text-align: center;"> <p>b)</p>  </div> <div style="text-align: center;"> <p>c)</p>  </div> </div>

## 6.10.2 Bewertungsbogen

### Beispiel ...

Wie würdest du die Schwierigkeit dieses Beispiels beurteilen?  
(1 - sehr leicht, 6 - sehr schwierig)

1     2     3     4     5     6

Wie interessant findest du die Aufgabenstellung?  
(1 - uninteressant, 6 - sehr interessant)

1     2     3     4     5     6

Wie viel Rechenaufwand ist deiner Ansicht nach zum Lösen der Aufgabe nötig?  
(1 - wenig Rechenaufwand, 6 - großer Rechenaufwand)

1     2     3     4     5     6

Wie viel „Denkaufwand“ steckt deiner Meinung nach hinter dem Beispiel?  
(1 - wenig Denkaufwand, 6 - hoher Denkaufwand)

1     2     3     4     5     6

Wie gefällt dir dieses Beispiel insgesamt? Ist diese Aufgabenstellung deiner Ansicht nach gut oder schlecht? Begründe deine Meinung (du kannst dabei die oben angeführten Punkte miteinander beziehen)!